1

nel-lógica

cezar a. mortari
(org.)

Tópicos de lógicas não clássicas

NEL

Tópicos de

Lógicas Não Clássicas

Universidade Federal de Santa Catarina
Reitora: Roselane Neckel

Departamento de Filosofia
Chefe: Claudia Pellegrini Drucker

Programa de Pós-Graduação em Filosofia
Coordenador: Alexandre Meyer Luz

NEL – Núcleo de Epistemologia e Lógica
Coordenador: Cezar A. Mortari

***Principia* – Revista Internacional de Epistemologia**

Editor responsável:	Luiz Henrique de A. Dutra
Editores assistentes:	Cezar A. Mortari
	Jaimir Conte
	Jonas Rafael Becker Arenhart

VIII Simpósio Internacional Principia

A Filosofia de Hilary Putnam

Comissão organizadora	**Comissão científica**
Cezar A. Mortari	Luiz Henrique de A. Dutra
Jaimir Conte	Catherine Elgin
Alexandre Meyer Luz	Dagfinn Føllesdal
	Otávio Bueno
	Hartry Field

http://www.principia.ufsc.br/SIP8.html
http://nel.ufsc.br

SÉRIE NEL-LÓGICA, VOL. 1

Cezar A. Mortari
(org.)

Tópicos de
Lógicas Não Clássicas

NEL – Núcleo de Epistemologia e Lógica
Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis, 2014

ISBN: 978-85-87253-25-5 (papel)
978-85-87253-24-8 (e-book)

UFSC, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, NEL
Caixa Postal 476
Bloco D, 2º andar, sala 209
Florianópolis, SC, 88010-970
(48) 3721-8612
nel@cfh.ufsc.br
http://nel.ufsc.br

FICHA CATALOGRÁFICA
(Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária
da Universidade Federal de Santa Catarina)

T674 Tópicos de lógicas não clássicas / Cezar A. Mortari (org.) –
Florianópolis : NEL/UFSC, 2014.

160 p.. - (Série Nel-lógica ; v. 1)

Inclui bibliografia.

ISBN 978-85-87253-25-5 (papel)
ISBN 978-85-87253-24-8 (e-book)

1. Filosofia. 2. Epistemologia. 3. Lógica. I. Mortari, Cezar Augusto. III. Série.

CDU: 16

Apresentação

Este primeiro volume da série *Nel-lógica* reúne uma série de textos apresentados e debatidos no VIII Simpósio Internacional Principia, realizado em agosto de 2013 em Florianópolis. O evento, promovido pelo Núcleo de Epistemologia e Lógica, NEL, e pela revista *Principia* da Universidade Federal de Santa Catarina, teve como tema central a filosofia de Hilary Putnam, mas acolheu também inúmeros trabalhos sobre os mais diversos temas e áreas da filosofia.

Uma boa amostra dos trabalhos apresentados no simpósio, vários dos quais dedicados particularmente à análise da filosofia da Putnam, foi publicada no volume 17, números 2 e 3, da revista *Principia*. Esta coletânea inclui outros textos, os quais foram apresentados na sessão do GT de Lógica da Anpof realizada como parte da programação do Simpósio. O caráter dos trabalhos aqui publicados demonstra que os simpósios internacionais organizados pela *Principia*, para além de qualquer tema ou autor central escolhido para discussão e homenagem, tem propiciado o debate dos mais diversos temas — no caso presente, *Tópicos de lógicas não clássicas*.

Como um dos organizadores do VIII Simpósio Principia, e também deste volume, gostaria de agradecer a todos os participantes e especialmente aos autores dos trabalhos aqui publicados. Os organizadores agradecem também à UFSC, CAPES e CNPq, instituições que propiciaram o apoio financeiro necessário para a realização do evento, e deste livro que é um dos seus resultados.

Florianópolis, setembro de 2014.

Cezar A. Mortari

série
Nel-lógica

NEL

Núcleo de Epistemologia e Lógica
Universidade Federal de Santa Catarina

nel@cfh.ufsc.br
(48) 3721-8612

www.cfh.ufsc.br/~nel
fax: (48) 3721-9751

Criado pela portaria 480/PRPG/96, de 2 de outubro de 1996, o NEL tem por objetivo integrar grupos de pesquisa nos campos da lógica, teoria do conhecimento, filosofia da ciência, história da ciência e outras áreas afins, na própria UFSC ou em outras universidades. Um primeiro resultado expressivo de sua atuação é a revista *Principia*, que iniciou em julho de 1997 e já tem dezessete volumes publicados, possuindo corpo editorial internacional. *Principia* aceita artigos inéditos, além de resenhas e notas, sobre temas de epistemologia e filosofia da ciência, em português, espanhol, francês e inglês. A Coleção Rumos da Epistemologia é publicada desde 1999, e a série Nel-lógica inicia sua publicação em 2014. Ambas aceitam textos inéditos, coletâneas e monografias, nas mesmas línguas acima mencionadas.

Sumário

SOBRE OS AUTORES

Ana Cláudia de Jesus Golzio é atualmente aluna de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Estadual de Campinas. Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2008) e mestrado em Filosofia pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2011). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Lógica e Álgebra.

Angela Pereira Rodrigues Moreira presentemente é aluna de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Estadual de Campinas e bolsista FAPESP. Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2009) e mestrado em Filosofia pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2012).

Hércules de Araújo Feitosa é licenciado em Matemática pela Fundação Educacional de Bauru (1984), mestre em Fundamentos da Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP – IGCE (1992) e doutor em Lógica e Filosofia da Ciência pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP – IFCH (1998). É professor assistente doutor da Universidade Estadual Paulista – UNESP – Faculdade de Ciências – Bauru, e credenciado no Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UNESP – FFC – Marília.

Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano possui graduação em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Campinas (1966), doutorado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (1982), com pós-doutorado na Universidade da Califórnia – Berkeley, na Universidade de Stanford e na Universidade de Oxford. Atualmente é Professor Titular em Lógica e Fundamentos da Matemática do Departamento de Filosofia da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp).

Kleidson Êglicio Carvalho da Silva Oliveira possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática com habilitação em Física pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2008) e mestrado em Filosofia na área de Lógica pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus Marília (2011). Atualmente faz Doutorado em Filosofia, na área de Lógica, na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Marcelo E. Coniglio tem doutorado em Matemática pela Universidade de São Paulo (1997); pós-doutorado pela Universidade Técnica de Lisboa (2002); e Livre-Docente em Lógica pela Universidade Estadual de Campinas (2004). Atualmente é Professor Titular do Departamento de Filosofia da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Coordenador do GT de Lógica da ANPOF, e Presidente da Sociedade Brasileira de Lógica (SBL), período 2014-2016.

Marcelo Reicher Soares é licenciado em Matemática pela Universidade São Francisco (1983), mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo – USP – ICMSC (1989) e doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo – USP – IME (2000). É professor assistente doutor da Universidade Estadual Paulista – UNESP – Faculdade de Ciências – Bauru.

Marcio Kléos Freire Pereira possui mestrado em Filosofia pela Universidade Federal da Paraíba (1996). Atualmente é Professor Adjunto da Universidade Federal do Maranhão, e cursa doutorado em Filosofia na Universidade Federal de Santa Catarina, sendo bolsista pela FAPEMA (Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão).

Mauri Cunha do Nascimento é bacharel (1977), mestre (1981) e doutor (1990) em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. Trabalhou na Universidade Estadual de Londrina – UEL (1979–1993). Desde 1993 é professor assistente doutor da Universidade Estadual Paulista – UNESP – Faculdade de Ciências – Bauru.

Tarcísio G. Rodrigues é mestre em Filosofia pela Universidade Estadual de Campinas (2010). Trabalha atualmente como analista e desenvolvedor de software nas seguintes áreas: análise de redes ópticas, dispositivos móveis, e aplicações web.

1

Some investigations on mbC and mCi

MARCELO E. CONIGLIO
TARCÍSIO G. RODRIGUES

Introduction

The *Logics of Formal Inconsistency* (**LFI**s, from now on) were introduced by W. Carnielli and J. Marcos in (Carnielli and Marcos 2002) as a class of paraconsistent logics able to internalize in the object language the notions of *consistency* and *inconsistency* by means of specific connectives (which are primitives or not). This approach to paraconsistency generalizes the original ideas of N.C.A. da Costa behind his well-known hierarchy of systems C_n — see (Costa 1963).

In (Carnielli, Coniglio, and Marcos, 2007) the study of **LFI**s started with a propositional logic called **mbC**, defined on a language containing a paraconsistent negation $\neg$, a conjunction $\wedge$, a disjunction $\vee$, an implication $\to$ and an unary connective $\circ$ for *consistency*. All the other systems studied in (Carnielli and Marcos 2002) and (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007) are extensions of **mbC** obtained by adding appropriate axioms.

We propose here a new axiomatization of the logic **mbC** formulated in the signature $\{\bot, \to, \neg, \circ\}$, where $\bot$ is a bottom. This simpler formulation allows to see in a clear way that **mbC** is in fact an extension of propositional classical logic obtained by adding a paraconsistent negation $\neg$ and a consistency operator $\circ$.

We also present sequent calculi for **mbC** and its extension **mCi**, both defined in the new signature, which are shown to admit cut elimination. As a consequence of this, two new results are proved for these logics: just like in classical logic, a negated formula $\neg\alpha$ is a theorem of **mbC** (resp., of **mCi**)

Mortari, C. A. (org.) *Tópicos de lógicas não clássicas*.
Florianópolis: NEL/UFSC, 2014, pp. 11–70.

iff α has no models. The other result states that the logic **mbC** is not controllably explosive. This gives a negative answer to an open problem known in the literature of **LFI**s.

1. The logics mbC and mCi

In this paper we will deal with the so-called *Tarskian logics* — see, for instance, (Wójcicki 1984):

Definition 1 (Tarskian Logic)**.** A logic $\mathscr{L}$ defined over a language $\mathcal{L}$ and with a consequence relation $\vdash$ is *Tarskian* if it satisfies the following properties:

(i) if $\alpha \in \Gamma$ then $\Gamma \vdash \alpha$;
(ii) if $\Gamma \vdash \alpha$ and $\Gamma \subseteq \Delta$ then $\Delta \vdash \alpha$;
(iii) if $\Delta \vdash \alpha$ and $\Gamma \vdash \beta$ for every $\beta \in \Delta$ then $\Gamma \vdash \alpha$.

A Tarskian logic $\mathscr{L}$ is *finitary* if it also satisfies:

(iv) if $\Gamma \vdash \alpha$ then there exists a finite subset Γ_0 of Γ such that $\Gamma_0 \vdash \alpha$.

Finally, a Tarskian logic $\mathscr{L}$ defined over a propositional language $\mathcal{L}$ generated by a signature from a set of propositional variables is called *structural* if it also satisfies:

(v) if $\Gamma \vdash \alpha$ then, for every substitution ε of formulas for variables, $\varepsilon[\Gamma] \vdash \varepsilon(\alpha)$.

A propositional logic is *standard* if it is a Tarskian, finitary and structural — see (Wójcicki 1984).

As mentioned in the previous section, **LFI**s are paraconsistent logics which can express, at the language level, the property of some formula to be consistent or inconsistent. To give a precise definition, we will slightly adapt Definition 23 in (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007), as it was done in (Coniglio and Silvestrini 2014) and (Coniglio, Esteva, and Godo 2014).

Definition 2. Let $\mathscr{L} = \langle For, \vdash \rangle$ be a standard logic. Assume that $\mathscr{L}$ is defined in a signature containing a negation $\neg$, and let $\bigcirc(p)$ be a nonempty set of formulas depending exactly on the propositional variable p. Then $\mathscr{L}$ is an **LFI** (with respect to $\neg$ and $\bigcirc(p)$) if the following holds (here, $\bigcirc(\varphi) = \{\psi(\varphi) \mid \psi(p) \in \bigcirc(p)\}$):

(i) $\varphi, \neg\varphi \nvdash \psi$ for some φ and ψ, i.e., $\mathscr{L}$ is not explosive w.r.t. $\neg$;
(ii) $\bigcirc(\varphi), \varphi \nvdash \psi$ for some φ and ψ;
(iii) $\bigcirc(\varphi), \neg\varphi \nvdash \psi$ for some φ and ψ; and
(iv) $\bigcirc(\varphi), \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ for every φ and ψ.

Principle (iv) is usually called *gently explosiveness* w.r.t. $\neg$ and $\bigcirc(p)$. When $\bigcirc(p)$ is a singleton, its element will be denoted by $\circ p$, and $\circ$ is called a *consistency* operator. The general definition above encompasses a wide range of paraconsistent logics. Any logic featuring a consistency connective must present, in order to formally express the properties of consistency, a set of logical axiom schemes or semantic rules governing this connective. Along these lines, in (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007) it were introduced **mbC** and **mCi**, two fundamental propositional **LFI**s. Starting from positive classical logic plus *tertium non datur* ($\alpha \vee \neg\alpha$), **mbC** is intended to comply with the above definition in a minimal way: an axiom scheme called (**bc1**) is added just describing the expected behavior of the consistency operator $\circ$ (see Definition 5). By its turn, the logic **mCi** is obtained extending **mbC** in order to express inconsistency as the (paraconsistent) negation of consistency (see Definition 6). In what follows, these logics will be briefly exposed in their original language along with the statement of soundness and completeness theorems with respect to paraconsistent bivaluations.

Definition 3 ($\Sigma^{\wedge,\vee}$ and $\mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$)**.** Let $Var = \{p_1, p_2, \ldots\}$ be a denumerable set of propositional variables (which will kept fixed along the paper). The propositional signature $\Sigma^{\wedge,\vee}$ is the set $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \circ\}$ formed by connectives for conjunction, disjunction, implication, negation and consistency. The propositional language generated by $\Sigma^{\wedge,\vee}$ from Var will be denoted by $\mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$.

Definition 4 (Formula Complexity)**.** The complexity of a given formula $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$, denoted by $l(\varphi)$, is defined recursively as follows:

1. If $\varphi = p$, where $p \in Var$, then $l(\varphi) = 0$;
2. If $\varphi = \neg\alpha$, then $l(\varphi) = l(\alpha) + 1$;

3. If $\varphi = \circ\alpha$, then $l(\varphi) = l(\alpha) + 2$;
4. If $\varphi = \alpha \# \beta$, where $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, then $l(\varphi) = l(\alpha) + l(\beta) + 1$.

Definition 5 (**mbC**$^{\wedge\vee}$)**.** The calculus **mbC**$^{\wedge\vee}$ — or **mbC**, as introduced in (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007) — is defined over the language $\mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ by the following Hilbert calculus:

Axiom schemes:

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \tag{\textbf{Ax1}}$$

$$\big(\alpha \rightarrow \beta\big) \rightarrow \big((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)\big) \tag{\textbf{Ax2}}$$

$$\alpha \rightarrow \big(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)\big) \tag{\textbf{Ax3}}$$

$$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha \tag{\textbf{Ax4}}$$

$$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta \tag{\textbf{Ax5}}$$

$$\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta) \tag{\textbf{Ax6}}$$

$$\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta) \tag{\textbf{Ax7}}$$

$$\big(\alpha \rightarrow \gamma\big) \rightarrow \big((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)\big) \tag{\textbf{Ax8}}$$

$$(\alpha \rightarrow \beta) \vee \alpha \tag{\textbf{Ax9}}$$

$$\alpha \vee \neg\alpha \tag{\textbf{Ax10}}$$

$$\circ\alpha \rightarrow \big(\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)\big) \tag{\textbf{bc1}}$$

Inference rule:

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta} \tag{\textbf{MP}}$$

Definition 6 (**mCi**$^{\wedge\vee}$)**.** The calculus **mCi**$^{\wedge\vee}$ — or **mCi**, as introduced in (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007) — is defined over the language $\mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ by adding to **mbC**$^{\wedge\vee}$ the following axiom schemes, for $n \geq 0$:[1]

$$\neg\circ\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha) \tag{\textbf{ci}}$$

$$\circ\neg^{n}\circ\alpha \tag{$\textbf{cc}_n$}$$

Observe that **Ax1**-**Ax9** plus **MP** constitutes a Hilbert calculus for positive classical logic (**CPL**$^{+}$), which is in fact the basis for **mbC** and its extensions such as **mCi**.

The above logics are sound and complete with relation to a suitable bivaluation semantics, to be defined now.

Definition 7 (Bivaluations for $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$)**.** A function $v : \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}} \to \{0,1\}$ is a bivaluation for $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ if it satisfies the following clauses:

$$v(\neg\varphi) = 0 \quad\Longrightarrow\quad v(\varphi) = 1 \tag{1}$$

$$v(\circ\varphi) = 1 \quad\Longrightarrow\quad v(\varphi) = 0 \text{ or } v(\neg\varphi) = 0 \tag{2}$$

$$v(\alpha \to \beta) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad v(\alpha) = 0 \text{ or } v(\beta) = 1 \tag{3}$$

$$v(\alpha \wedge \beta) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad v(\alpha) = 1 \text{ and } v(\beta) = 1 \tag{4}$$

$$v(\alpha \vee \beta) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad v(\alpha) = 1 \text{ or } v(\beta) = 1 \tag{5}$$

The set of all such valuations is designated by $V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}$.

Definition 8 (Bivaluations for $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$)**.** A function $v : \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}} \to \{0,1\}$ is a bivaluation for $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$ if it is a paraconsistent bivaluation for $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ and satisfies also the following:

$$v(\neg\circ\alpha) = 1 \quad\Longrightarrow\quad v(\alpha) = 1 \text{ and } v(\neg\alpha) = 1 \tag{6}$$

$$v(\circ\neg^n\circ\alpha) = 1 \quad (\text{for } n \geq 0) \tag{7}$$

The set of all such bivaluations is designated by $V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$.

If $V \in \{V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}, V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}\}$ we define, for every $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$, the following semantic consequence relation w.r.t. the set of bivaluations V: $\Gamma \vDash_V \varphi$ iff, for every $v \in V$, if $v(\gamma) = 1$ for every $\gamma \in \Gamma$ then $v(\varphi) = 1$. The sets collecting the bivaluations just defined, associated respectively to $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ and $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$, form a sound and complete semantics for the respective logic:

Theorem 9. *Let* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$*. Then:*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}} \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad \Gamma \vDash_{V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}} \varphi$$

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}} \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad \Gamma \vDash_{V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}} \varphi$$

For a proof of the above theorem the reader is referred to (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007), Theorems 56, 61, 85 and 88.

2. A New Language for mbC and mCi

The present approach simplifies the propositional axioms from Definitions 5 and 6 by the way of a simplification in the propositional signature: in the place of the above set $\Sigma^{\wedge,\vee}$ of connectives it is made use of a new simpler one, namely $\Sigma^{\bot} = \{\bot, \to, \neg, \circ\}$. The propositional language generated by $\Sigma^{\bot}$ from Var will be denoted by $\mathcal{L}_{\Sigma^{\bot}}$. The notion of complexity of a formula in $\mathcal{L}_{\Sigma^{\bot}}$ is defined analogously to Definition 4:

Definition 10 (Formula Complexity in $\mathcal{L}_{\Sigma^{\bot}}$)**.** The complexity of a given formula $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\bot}}$, denoted by $l(\varphi)$, is defined recursively as follows:

1. If $\varphi = p$, where $p \in Var \cup \{\bot\}$, then $l(\varphi) = 0$;
2. If $\varphi = \neg\alpha$, then $l(\varphi) = l(\alpha) + 1$;
3. If $\varphi = \circ\alpha$, then $l(\varphi) = l(\alpha) + 2$;
4. If $\varphi = \alpha \to \beta$, then $l(\varphi) = l(\alpha) + l(\beta) + 1$.

As observed above, positive classical logic **CPL**$^+$ may be axiomatized by axioms **Ax1**-**Ax9** plus **MP**. As a consequence, the connectives $\wedge$, $\vee$ and $\to$, as defined by these axioms, are the classical ones and they could, in principle, be defined in terms of just $\to$ and a bottom particle $\bot$, as in classical logic. Despite there is no $\bot$ in **CPL**$^+$, in **mbC** and all its extensions, any formula α defines a bottom $\bot_\alpha \overset{\text{def}}{=} \alpha \wedge (\neg\alpha \wedge \circ\alpha)$, because of the axiom **bc1**.

As there is such a bottom particle in **mbC**, it is possible to consider from the beginning a 0-ary connective $\bot$ and the axiom schemes for **CPL** in the signature $\Sigma^{\bot}$, as well as the corresponding axiom schemes for the paraconsistent negation $\neg$ and the consistency operator $\circ$ without modifying the logics in question, and therefore to use the signature above to axiomatize **mbC** and its extensions.

A justification for the language proposed here, besides the simplification achieved (for instance, in the proofs by induction on the complexity of a formula), is that $\bot$, being so important in the context of **LFI**s, is usually defined with respect to a formula α as $\bot_\alpha$ and so there is an infinitude of such bottom particles. Same observation applies to the classical negation ($\sim$), which is defined as $\sim_\alpha\beta \overset{\text{def}}{=} \beta \to \bot_\alpha$ and so there are infinite classical negations inside **mbC** and its extensions.[2] Therefore, the inclusion of bottom $\bot$ in the signature allows to define a distinguished classical negation:

Definition 11 (Classical Negation)**.**

$$\sim\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \to \bot$$

From this, $\bot$ and $\sim$ can be considered as canonical choices for bottom and the classical negation inside **mbC** and its extensions. Moreover, these logics can be considered as extensions of classical propositional logic **CPL** (defined in the signature $\{\to, \bot\}$) by adding a paraconsistent negation and a consistency operator. This allows to see these **LFI**s as a kind of bimodal logics based on **CPL**. Despite this, these logics are not *self-extensional* in Wójcicki's sense — see (Wójcicki, 1979) — that is, (weak)replacement does not hold: from $\alpha \vdash \beta$ and $\beta \vdash \alpha$ does not follow in general that $\#\alpha \vdash \#\beta$ and $\#\beta \vdash \#\alpha$, for $\# \in \{\neg, \circ\}$. Of course this disappointing feature is already present in the original formulation of **mbC** and **mCi** — see (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007).

Definition 12 ($\mathbf{mbC}^{\bot}$)**.** The calculus $\mathbf{mbC}^{\bot}$ is defined over the language $\mathcal{L}_{\Sigma^{\bot}}$ by the following Hilbert calculus:

Axiom schemes:

$$\alpha \to (\beta \to \alpha) \tag{$\mathbf{Ax1}$}$$

$$\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big) \tag{$\mathbf{Dst}$}$$

$$\sim\sim\alpha \to \alpha \tag{$\mathbf{Dne}$}$$

$$\sim\alpha \to \neg\alpha \tag{$\sim\neg$}$$

$$\circ\alpha \to (\neg\alpha \to \sim\alpha) \tag{$\mathbf{bc1}^{\bot}$}$$

Inference rule:

$$\frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta} \tag{$\mathbf{MP}$}$$

Remark 13. *The axiom schemes* ***Ax1****,* ***Dst*** *and* ***Dne*** *plus* ***MP*** *constitute an axiomatization of* **CPL** *in the signature* $\{\to, \bot\}$*, which is usually atributed to Church (taking* $\sim$ *as in Definition 11).*

Definition 14 ($\mathbf{mCi}^{\perp}$)**.** The calculus $\mathbf{mCi}^{\perp}$ is defined over the language $\mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$ by adding to $\mathbf{mbC}^{\perp}$ (Definition 12) the following axiom schemes, for $n \geq 0$:

$$\neg{\circ}\alpha \to \alpha \tag{$\mathbf{ci}^1$}$$

$$\neg{\circ}\alpha \to \neg\alpha \tag{$\mathbf{ci}^2$}$$

$$\circ\neg^n{\circ}\alpha \tag{$\mathbf{cc}_n$}$$

The deduction meta-theorem (MTD) holds for these logics. This is a consequence of a well-known result that states that any Hilbert calculus with **MP** as its only inference rule and where **Ax1** and **Dst** are derivable, satisfies MTD:

Theorem 15 (Deduction Meta-Theorem)**.** *Let* $\mathscr{L} \in \{\mathbf{mbC}^{\perp}, \mathbf{mCi}^{\perp}\}$*. Then, for every* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$*:*

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathscr{L}} \psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \varphi \to \psi\,.$$

The next technical lemma is required for establishing the completeness theorem in the next section.

Lemma 16. *All the following formulas are theorems of* $\mathbf{mbC}^{\perp}$ *and* $\mathbf{mCi}^{\perp}$*:*

1. $\perp \to \alpha$
2. $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to \gamma) \to \Big((\beta \to \gamma) \to \big(((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \gamma\big)\Big)$
4. $(\alpha \to \gamma) \to \Big((\beta \to \gamma) \to \big(((\alpha \to \perp) \to \beta) \to \gamma\big)\Big)$

Proof. All these formulas are classic tautologies and therefore they can be derived in both logics, from Remark 13. □

3. Completeness for Bivaluation Semantics

Definition 17 (Bivaluations for $\mathbf{mbC}^{\perp}$)**.** A function $v : \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}} \to \{0,1\}$ is a bivaluation for $\mathbf{mbC}^{\perp}$ if it satisfies the following clauses:

$$v(\perp) = 0 \tag{1}$$

$$v(\neg\varphi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v(\varphi) = 1 \tag{2}$$
$$v(\circ\varphi) = 1 \quad \Longrightarrow \quad v(\varphi) = 0 \text{ or } v(\neg\varphi) = 0 \tag{3}$$
$$v(\alpha \to \beta) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad v(\alpha) = 0 \text{ or } v(\beta) = 1 \tag{4}$$

Definition 18 (Bivaluations for $\mathbf{mCi}^{\perp}$)**.** A function $v : \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}} \to \{0, 1\}$ is a bivaluation for $\mathbf{mCi}^{\perp}$ if it is a bivaluation for $\mathbf{mbC}^{\perp}$ and satisfies also the following:

$$v(\neg\circ\varphi) = 1 \quad \Longrightarrow \quad v(\varphi) = 1 \text{ and } v(\neg\varphi) = 1 \tag{5}$$
$$v(\circ\neg^{n}\circ\varphi) = 1 \quad (\text{for } n \geq 0) \tag{6}$$

Proposition 19. *The bivaluations for* $\mathbf{mCi}^{\perp}$ *are the mappings* $v : \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}} \to \{0, 1\}$ *satisfying clauses (1), (2), (4) and (6) from the two previous definitions, plus the folllowing:*

$$v(\circ\varphi) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad v(\varphi) = 0 \textit{ or } v(\neg\varphi) = 0 \tag{7}$$

Proof. Let $v : \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}} \to \{0, 1\}$ be a mapping satisfying clauses (2) and (6). Then, it is straightforward to prove that v satisfies clauses (3) and (5) iff it satisfies clause (7). □

Now, a technical result is given whose demonstration will be used latter on, in the proof of Theorem 35.

Lemma 20. *Let* $v_0 : Var \to \{0, 1\}$ *be a mapping. Then, there exists bivaluations* $v_b^{\perp} \in V^{\mathbf{mbC}^{\perp}}$*,* $v_i^{\perp} \in V^{\mathbf{mCi}^{\perp}}$*,* $v_b^{\wedge\vee} \in V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}$ *and* $v_i^{\wedge\vee} \in V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$*, all of them extending* v_0*.*

Proof. The values of $v_b^{\perp}(\psi)$ and $v_i^{\perp}(\psi)$, for $\psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$, and those of $v_b^{\wedge\vee}(\psi)$ and $v_i^{\wedge\vee}(\psi)$, for $\psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$, are defined by induction on $l(\psi)$. To begin with, if ψ is such that $l(\psi) = 0$, then $\psi \in Var$ (if $\psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$ or $\psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$), or $\psi = \perp$ (if $\psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$). The bivaluations, for this cases, are defined as:

1. $v_b^{\perp}(p) = v_i^{\perp}(p) = v_b^{\wedge\vee}(p) = v_i^{\wedge\vee}(p) = v_0(p)$, for all $p \in Var$;
2. $v_b^{\perp}(\perp) = v_i^{\perp}(\perp) = 0$.

Suppose now that $l(\psi) = n$, $n > 1$, and that the bivaluations are defined for all ψ' such that $l(\psi') < n$. According to the main connective of ψ the definition goes as follows:

1. If $\psi = \alpha \to \beta$, then, for $v \in \{v_b^{\wedge\vee}, v_i^{\wedge\vee}, v_b^{\perp}, v_i^{\perp}\}$:

$$v(\alpha \to \beta) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v(\alpha) = 0 \text{ or } v(\beta) = 1$$

2. If $\psi = \alpha \wedge \beta$, then, for $v \in \{v_b^{\wedge\vee}, v_i^{\wedge\vee}\}$:

$$v(\alpha \wedge \beta) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v(\alpha) = 1 \text{ and } v(\beta) = 1$$

3. If $\psi = \alpha \vee \beta$, then, for $v \in \{v_b^{\wedge\vee}, v_i^{\wedge\vee}\}$:

$$v(\alpha \vee \beta) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v(\alpha) = 1 \text{ or } v(\beta) = 1$$

4. If $\psi = \neg\gamma$, there are two cases:

   (a) If, on the one hand, $v \in \{v_b^{\wedge\vee}, v_b^{\perp}\}$ and γ is arbitrary or, on the other hand, $v \in \{v_i^{\wedge\vee}, v_i^{\perp}\}$ and $\gamma \neq \neg^k\circ\gamma'$, for all $k \geq 0$ and formula γ', then:

   $$v(\neg\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } v(\gamma) = 0, \text{ or} \\ \text{arbitrary} & \text{otherwise} \end{cases}$$

   (b) If $v \in \{v_i^{\wedge\vee}, v_i^{\perp}\}$ and $\gamma = \neg^k\circ\gamma'$, for some $k \geq 0$ and formula γ', then:

   $$v(\neg\gamma) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v(\gamma) = 0$$

5. If $\psi = \circ\gamma$, then, for $v \in \{v_b^{\wedge\vee}, v_b^{\perp}\}$:

$$v(\circ\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{if } v(\gamma) = v(\neg\gamma) = 1, \text{ or} \\ \text{arbitrary} & \text{otherwise} \end{cases}$$

   and, for $v \in \{v_i^{\wedge\vee}, v_i^{\perp}\}$:

$$v(\circ\gamma) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v(\gamma) = v(\neg\gamma) = 1$$

It is left to the reader to check that the above definitions result indeed on bivaluations in $V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}$, $V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$, $V^{\mathbf{mbC}^{\perp}}$ or $V^{\mathbf{mCi}^{\perp}}$, as required. □

Observe that in the process of the inductive definition above, it is possible to choose arbitrarily some values. Along these lines, in Theorem 35 a number of bivaluations are defined, modifying Lemma 20 only on those cases for which the value is choosen arbitrarily.

Now we will prove that the new logics are sound and complete for the semantics defined at the beginning of the present section.

Theorem 21 (Soundness)**.** *Let* $\mathscr{L}$ *be* $\mathbf{mbC}^{\perp}$ *or* $\mathbf{mCi}^{\perp}$*. Then, for every* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$*:*

$$\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \Gamma \vDash_{\mathscr{L}} \varphi$$

Proof. This proof presents no difficulty and it is left to the reader to check that the value of any bivaluation for $\mathbf{mbC}^{\perp}$ or $\mathbf{mCi}^{\perp}$ is always 1 for any instance of the axioms of Definitions 17 or 18, respectively. Additionally, if the value given by a bivaluation to the two premises of **MP** is 1 then the value given to the conclusion must be 1. □

The proof of completeness needs some definitions and results. Recall from Definition 1 the notion of Tarskian Logic.

Definition 22. For a given Tarskian logic $\mathscr{L}$ over the language $\mathcal{L}$, let $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}$. The set Γ is called *maximal non-trivial with relation to* φ if $\Gamma \nvdash_{\mathscr{L}} \varphi$ but $\Gamma, \psi \vdash_{\mathscr{L}} \varphi$ for any $\psi \notin \Gamma$.

A set of formulas Γ is *closed* in a Tarskian logic $\mathscr{L}$ if it holds, for every formula ψ: $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \psi$ iff $\psi \in \Gamma$. The proof of the following result is straightforward:

Lemma 23. *Any set of formulas maximal non-trivial with relation to* φ *in* $\mathscr{L}$ *is closed, provided that* $\mathscr{L}$ *is Tarskian.*

In (Wójcicki 1984), Theorem 22.2, there is a proof of the following classical result:

Theorem 24 (Lindenbaum-Łos)**.** *Let* $\mathscr{L}$ *be a Tarskian and finitary logic over the language* $\mathcal{L}$*. Let* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}$ *such that* $\Gamma \nvdash_{\mathscr{L}} \varphi$*. Then, there exists a set* Δ *such that* $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq \mathcal{L}$ *with* Δ *maximal non-trivial with relation to* φ *in* $\mathscr{L}$*.*

Every logic $\mathscr{L}$ defined by a Hilbert calculus where the inference rules are finitary is Tarskian and finitary, and so Theorem 24 holds in $\mathscr{L}$. In particular, Theorem 24 holds for $\mathbf{mbC}^{\perp}$ and $\mathbf{mCi}^{\perp}$.

Theorem 25. *Let $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$, with Γ maximal non-trivial with relation to φ in $\mathbf{mbC}^{\perp}$ (resp. in $\mathbf{mCi}^{\perp}$). The mapping $v : \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}} \to \{0, 1\}$ defined by:*

$$v(\psi) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi \in \Gamma$$

for all $\psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$ is a bivaluation for $\mathbf{mbC}^{\perp}$ (resp. for $\mathbf{mCi}^{\perp}$).

Proof. Let $\psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$ be an arbitrary formula. The cases common to both $\mathbf{mbC}^{\perp}$ and $\mathbf{mCi}^{\perp}$ will be firstly analyzed:

1. $\psi = \perp$. Suppose, by contradiction, that $\perp \in \Gamma$. As $\vdash_{\mathscr{L}} \perp \to \varphi$ (Lemma 16, Item 1) then $\perp \to \varphi \in \Gamma$, by Lemma 23. By **MP** and Lemma 23 again it follows that $\varphi \in \Gamma$, a contradiction. Therefore $\perp \notin \Gamma$ and so $v(\perp) = 0$.

2. $\psi = \neg\alpha$. Suppose $\neg\alpha \notin \Gamma$ and, by contradiction, that also $\alpha \notin \Gamma$. As Γ is maximal, it follows that $\Gamma, \neg\alpha \vdash_{\mathscr{L}} \varphi$ and $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathscr{L}} \varphi$. By the Deduction Theorem, $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \alpha \to \varphi$ and $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \neg\alpha \to \varphi$. Now, by Lemma 16, Item 4, $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} ((\alpha \to \perp) \to \neg\alpha) \to \varphi$. However, $(\alpha \to \perp) \to \neg\alpha$ is an instance of Axiom $\sim\neg$, and then $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \varphi$, a contradiction. Therefore:

$$v(\neg\alpha) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v(\alpha) = 1\ .$$

3. $\psi = \circ\alpha$. Suppose $\circ\alpha \in \Gamma$ and, by contradiction, that both $\alpha \in \Gamma$ and $\neg\alpha \in \Gamma$. Then, by Axiom $\mathbf{bc1}^{\perp}$ and Lemma 23, $\sim\alpha \in \Gamma$. By definition of $\sim$ and by **MP** this implies that $\perp \in \Gamma$. By Lemma 16 Item 1 it follows that $\varphi \in \Gamma$, a contradiction. Therefore:

$$v(\circ\alpha) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad v(\alpha) = 0 \text{ or } v(\neg\alpha) = 0\ .$$

4. $\psi = \alpha \to \beta$. Suppose $\alpha \to \beta \in \Gamma$. If $\alpha \in \Gamma$ then $\beta \in \Gamma$, by **MP** and Lemma 23. Therefore:

$$v(\alpha \to \beta) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad v(\alpha) = 0 \text{ or } v(\beta) = 1\ .$$

Now, suppose $\alpha \notin \Gamma$ or $\beta \in \Gamma$. If $\beta \in \Gamma$ then $\alpha \to \beta \in \Gamma$ by Axiom **Ax1**, **MP** and Lemma 23. If $\alpha \notin \Gamma$ then, by the maximality of Γ, it follows that

$\Gamma, \alpha \vdash_{\mathscr{L}} \varphi$. Now, suppose, by contradiction, that $\alpha \to \beta \notin \Gamma$. Then, $\Gamma, \alpha \to \beta \vdash_{\mathscr{L}} \varphi$. By the Deduction Meta-Theorem, both $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} (\alpha \to \beta) \to \varphi$ and $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \alpha \to \varphi$. By Lemma 16, Item 3, $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \big(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha\big) \to \varphi$ and, by Item 2, $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \varphi$, a contradiction. Therefore:

$$v(\alpha) = 0 \text{ or } v(\beta) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad v(\alpha \to \beta) = 1\ .$$

Now, the cases valid only for $\mathbf{mCi}^{\perp}$:

5. $\psi = \neg\circ\alpha$. Suppose $\neg\circ\alpha \in \Gamma$. This implies, by Axioms $\mathbf{ci}^1$ and $\mathbf{ci}^2$, that $\alpha \in \Gamma$ and $\neg\alpha \in \Gamma$. Therefore:

$$v(\neg\circ\alpha) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad v(\alpha) = 1 \text{ and } v(\neg\alpha) = 1\ .$$

6. $\psi = \circ\neg^n\circ\alpha$. By Axiom $\mathbf{cc}_n$ and Lemma 23, it follows that:

$$v(\circ\neg^n\circ\alpha) = 1\ .$$

□

Corollary 26 (Completeness)**.** *Let* $\mathscr{L}$ *be* $\mathbf{mbC}^{\perp}$ *or* $\mathbf{mCi}^{\perp}$*, then:*

$$\Gamma \vDash_{\mathscr{L}} \varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \varphi$$

Proof. Suppose $\Gamma \nvdash_{\mathscr{L}} \varphi$ and let Δ be a set maximal non-trivial with relation to φ in $\mathscr{L}$ extending Γ (see Theorem 24). By Theorem 25, there is a bivaluation for $\mathscr{L}$ satisfying Γ (as $\Gamma \subseteq \Delta$) but not φ (as $\varphi \notin \Delta$). Therefore $\Gamma \nvDash_{\mathscr{L}} \varphi$ and so the theorem follows by contraposition. □

4. Equivalence between both formulations

In this section $\mathbf{mbC}^{\perp}$ and $\mathbf{mCi}^{\perp}$ will be shown to be equivalent to their counterparts $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ and $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$. To achieve this, the formalism to compare logics known as *conservative translations between logics*, introduced in (Silva, D'Ottaviano, and Sette 1999), will be used. In what follows, if * is a mapping defined on formulas and Γ is a set of formulas then $\Gamma^* \overset{\text{def}}{=} \{\gamma^* \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Definition 27 (Translation between Logics (Silva, D'Ottaviano, and Sette 1999))**.** Let $\mathscr{L}_1$ and $\mathscr{L}_2$ be logics with sets of formulas $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$, respectively. A mapping $^*\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ is said to be a *translation from* $\mathscr{L}_1$ *to* $\mathscr{L}_2$ if, for every $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathcal{L}_1$:

$$\Gamma \vdash_{\mathscr{L}_1} \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \Gamma^* \vdash_{\mathscr{L}_2} \alpha^*\ .$$

And it is called a *conservative translation* if it satisfies the stronger property:

$$\Gamma \vdash_{\mathscr{L}_1} \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Gamma^* \vdash_{\mathscr{L}_2} \alpha^* .$$

Recall the notion of Tarskian logic (Definition 1). A logic satisfying Item (ii) of that definition is called monotonic, and if it satisfies Item (iv) is called finitary. Then:

Theorem 28. *Let $\mathscr{L}_1$ and $\mathscr{L}_2$ be monotonic logics, where $\mathscr{L}_1$ is also finitary, such that both logics have implications $\to$ and $\to'$ respectively, satisfying the Deduction Meta-Theorem MTD (see Theorem 15). Suppose that $^*\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ is a mapping for which:*

$$\vdash_{\mathscr{L}_1} \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \vdash_{\mathscr{L}_2} \alpha^* ,$$

and this mapping is such that $(\alpha \to \beta)^* = \alpha^* \to' \beta^*$. Then * is a translation from $\mathscr{L}_1$ to $\mathscr{L}_2$. Moreover, if $\mathscr{L}_2$ is also compact and * satisfies the stronger property:

$$\vdash_{\mathscr{L}_1} \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vdash_{\mathscr{L}_2} \alpha^* ,$$

then the mapping * is also a conservative translation.

Proof. Suppose $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}_1} \alpha$. By the finitariness of $\mathscr{L}_1$, there is a finite $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ such that $\Gamma_0 \vdash_{\mathscr{L}_1} \alpha$. Now, suppose that $\Gamma_0 = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ is non-empty. Then, from the fact that $\to$ satisfies MTD, $\vdash_{\mathscr{L}_1} \gamma_1 \to \big(\ldots \to (\gamma_n \to \alpha)\ldots\big)$. From the hypothesis on *, it is the case that:

$$\vdash_{\mathscr{L}_2} \Big(\gamma_1 \to \big(\ldots \to (\gamma_n \to \alpha)\ldots\big)\Big)^*$$

and:

$$\vdash_{\mathscr{L}_2} \gamma_1^* \to' \big(\ldots \to' (\gamma_n^* \to' \alpha^*)\ldots\big) .$$

From the fact that $\to'$ satisfies MTD:

$$\gamma_1^*, \ldots, \gamma_n^* \vdash_{\mathscr{L}_2} \alpha^*$$

and, from the monotonicity of $\mathscr{L}_2$, $\Gamma^* \vdash_{\mathscr{L}_2} \alpha^*$. The case when Γ_0 is empty is even simpler. The other statements are proved similarly. $\square$

Two mappings will now be defined by induction on the formula complexity. They will be proved to be conservative translations latter on, on the present section.

Definition 29. Fix an arbitrary propositional variable in Var, for instance p_1. The mapping $^{\circledast} : \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}} \to \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ is defined inductively for all $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$ as follows:

$$\begin{aligned} q^{\circledast} &= q, \text{ if } q \in Var; \\ \perp^{\circledast} &= p_1 \wedge (\neg p_1 \wedge \circ p_1); \\ (\#\alpha)^{\circledast} &= \#(\alpha^{\circledast}) \text{ for } \# \in \{\neg, \circ\}; \\ (\alpha \to \beta)^{\circledast} &= \alpha^{\circledast} \to \beta^{\circledast}. \end{aligned}$$

Definition 30. The mapping $^{*} : \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}} \to \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$ is defined by induction on $l(\varphi)$, for all $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ as follows:

$$\begin{aligned} q^{*} &= q, \text{ if } q \in Var; \\ (\#\alpha)^{*} &= \#(\alpha^{*}) \text{ for } \# \in \{\neg, \circ\}; \\ (\alpha \to \beta)^{*} &= \alpha^{*} \to \beta^{*}; \\ (\alpha \vee \beta)^{*} &= (\alpha^{*} \to \perp) \to \beta^{*}; \\ (\alpha \wedge \beta)^{*} &= (\alpha^{*} \to (\beta^{*} \to \perp)) \to \perp. \end{aligned}$$

The injectivity of these mappings needs to be established, in order to be possible to properly define the bivaluations of Theorem 35. But, first, an intermediary result is given:

Lemma 31. *There is no formulas $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ satisfying the following equation:*

$$\varphi^{*} \to \perp = \psi^{*}$$

Proof. Suppose, by contradiction, there is a solution in $\mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ for the above identity and let φ and ψ be such a solution with minimum value of $l(\varphi)+l(\psi)$. Observe now that $\perp$ is not on the image of * and so $\psi \neq \alpha \to \beta$ and $\psi \neq \alpha \vee \beta$, for any of these would imply $\beta^{*} = \perp$. Therefore, the only way to get the image of ψ to be $\varphi^{*} \to \perp$ is with $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Therefore $\varphi^{*} \to \perp = (\psi_1^{*} \to (\psi_2^{*} \to \perp)) \to \perp$, and so $\varphi^{*} = \psi_1^{*} \to (\psi_2^{*} \to \perp)$.

Now, there are two cases:

1. $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$. Therefore $\varphi^* = \varphi_1^* \to \varphi_2^*$, $\varphi_1^* = \psi_1^*$ and $\varphi_2^* = \psi_2^* \to \bot$.

2. $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$. Therefore $\varphi^* = (\varphi_1^* \to \bot) \to \varphi_2^*$, $\varphi_1^* \to \bot = \psi_1^*$ and $\varphi_2^* = \psi_2^* \to \bot$.

In both cases (ψ_2, φ_2) is a solution to the equation in question with $l(\psi_2) + l(\varphi_2) < l(\varphi) + l(\psi)$, a contradiction. □

Theorem 32. *The mappings* $^{\circledast} : \mathcal{L}_{\Sigma^\bot} \to \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ *and* $^* : \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}} \to \mathcal{L}_{\Sigma^\bot}$ *from Definitions 29 and 30 are injective.*

Proof. Let $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^\bot}$ be such that $\varphi^{\circledast} = \psi^{\circledast}$. By induction on $l(\varphi) + l(\psi)$ it is easy to prove that $\varphi = \psi$. It is a consequence of the fact that, by Definition 29, there are no two different equations producing, to the right, formulas with the same main connective.

Now, let $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ be such that $\varphi^* = \psi^*$. The proof is by induction, analogous to that for $^{\circledast}$. However, the induction step for which the main connective of both sides of the above equation is $\to$ is a bit more complicated. In fact, there are three equations on Definition 30 producing, to the right, a formula with $\to$ as the main connective. So, let $\varphi^* = \alpha' \to \beta' = \psi^*$. Then, there are the following possibilities:

a) $\varphi = \alpha \to \beta$ and $\psi = \gamma \to \delta$. Therefore, $\varphi^* = \alpha^* \to \beta^* = \gamma^* \to \delta^* = \psi^*$. By unique readability, it follows that $\alpha^* = \gamma^*$ and $\beta^* = \delta^*$. The result is then obtained by the induction hypothesis: $\alpha = \gamma$ and $\beta = \delta$, which implies that $\varphi = \psi$.

b) $\varphi = \alpha \to \beta$ and $\psi = \gamma \vee \delta$. Therefore, $\varphi^* = \alpha^* \to \beta^* = (\gamma^* \to \bot) \to \delta^* = \psi^*$. By unique readability, $\alpha^* = \gamma^* \to \bot$, which is impossible by Lemma 31.

c) $\varphi = \alpha \to \beta$ and $\psi = \gamma \wedge \delta$. This is impossible, for it would imply $\beta^* = \bot$.

d) $\varphi = \alpha \vee \beta$ and $\psi = \gamma \vee \delta$. Then, like in item a), $\alpha = \gamma$ and $\beta = \delta$, from the fact that $\alpha^* \to \bot = \gamma^* \to \bot$ and $\beta^* = \delta^*$. Then $\varphi = \psi$.

e) $\varphi = \alpha \vee \beta$ and $\psi = \gamma \wedge \delta$. This is impossible, for it would imply $\beta^* = \bot$.

f) $\varphi = \alpha \wedge \beta$ and $\psi = \gamma \wedge \delta$. Then, $\alpha^* \to (\beta^* \to \bot) = \gamma^* \to (\delta^* \to \bot)$, which implies that $\alpha = \gamma$ and $\beta = \delta$. Therefore $\varphi = \psi$. □

Corollary 33.
1. Let $\varphi = \#\gamma \in \mathcal{L}_{\Sigma^\perp}$, with $\# \in \{\neg, \circ\}$. If $\varphi \in Im(^*) = \{\psi^* \mid \psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}\}$, there exists a unique formula $\delta \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ such that $\varphi = (\#\delta)^*$.

2. Let $\varphi = \#\gamma \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$, with $\# \in \{\neg, \circ\}$. If $\varphi \in Im(^\circledast) = \{\psi^\circledast \mid \psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^\perp}\}$, there exists a unique formula $\delta \in \mathcal{L}_{\Sigma^\perp}$ such that $\varphi = (\#\delta)^\circledast$.

Proof. It is a direct consequence of the injectivity and the very definition of the mappings * and $^\circledast$. □

Lemma 34.
1. Let $v \in V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}$ (resp. $v \in V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$). Then the mapping $v' : \mathcal{L}_{\Sigma^\perp} \to \{0,1\}$ defined by $v'(\varphi) \overset{def}{=} v(\varphi^\circledast)$ is such that $v' \in V^{\mathbf{mbC}^\perp}$ (resp. $v' \in V^{\mathbf{mCi}^\perp}$).

2. Let $v \in V^{\mathbf{mbC}^\perp}$ (resp. $v \in V^{\mathbf{mCi}^\perp}$). Then the mapping $v' : \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}} \to \{0,1\}$ defined by $v'(\varphi) \overset{def}{=} v(\varphi^*)$ is such that $v' \in V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}$ (resp. $v' \in V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$).

Proof. 1. Let $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^\perp}$ be an arbitrary formula. We will prove that v' satisfies the clauses from Definition 17 (also from Definition 18, if $v \in V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$). Firstly, the cases common to both $V^{\mathbf{mbC}^\perp}$ and $V^{\mathbf{mCi}^\perp}$ will be analyzed:

a) $\varphi = \perp$. Then $\varphi^\circledast = p_1 \wedge (\neg p_1 \wedge \circ p_1)$ and so $v(\varphi^\circledast) = 0$ for any bivaluation for $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ or $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$. Therefore $v'(\perp) = v(\varphi^\circledast) = 0$.

b) $\varphi = \neg\alpha$. Then $\varphi^\circledast = \neg(\alpha^\circledast)$ and therefore, if $v'(\neg\alpha) = 0$, then $v(\neg(\alpha^\circledast)) = 0$ (by definition of v'). Now, as v is a bivaluation for $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ or $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$, it follows that $v(\alpha^\circledast) = 1$, and so $v'(\alpha) = 1$.

c) $\varphi = \circ\alpha$. Then $\varphi^\circledast = \circ(\alpha^\circledast)$ and therefore, if $v'(\circ\alpha) = 1$, then $v(\circ(\alpha^\circledast)) = 1$. Now, as v is a bivaluation for $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ or $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$, $v(\alpha^\circledast) = v'(\alpha) = 0$ or $v(\neg(\alpha^\circledast)) = v'(\neg\alpha) = 0$.

d) $\varphi = \alpha \to \beta$. Then $\varphi^\circledast = \alpha^\circledast \to \beta^\circledast$ and, therefore, $v'(\alpha \to \beta) = 1$ if, and only if, $v(\alpha^\circledast \to \beta^\circledast) = 1$. But the last occurs exactly when $v(\alpha^\circledast) = 0$ or $v(\beta^\circledast) = 1$, that is, exactly when $v'(\alpha) = 0$ or $v'(\beta) = 1$.

Now, the cases valid only for $\mathbf{mCi}^\perp$:

e) $\varphi = \neg\circ\alpha$. Then, $\varphi^\circledast = \neg\circ(\alpha^\circledast)$ and, therefore, if $v'(\neg\circ\alpha) = 1$, also $v(\neg\circ(\alpha^\circledast)) = 1$. Now, as v is a bivaluation for $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$, $v'(\alpha) = v(\alpha^\circledast) = 1$ and $v'(\neg\alpha) = v(\neg(\alpha^\circledast)) = 1$.

f) $\varphi = \circ\neg^n\circ\alpha$. Then, $\varphi^\circledast = \circ\neg^n\circ(\alpha^\circledast)$ and, as v is a bivaluation for $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$, $v(\varphi^\circledast) = 1$. This implies that $v'(\circ\neg^n\circ\alpha) = 1$.

2. Let $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ be an arbitrary formula. We will prove that v' is an $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$-valuation. If φ is of the form $\neg\alpha$, $\circ\alpha$, $\alpha \to \beta$, $\neg\circ\alpha$ or $\circ\neg^n\circ\alpha$, the proof is similar to that of Item 1 above. Now, for the remaining cases, common to both $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ and $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$:

a) $\varphi = \alpha \vee \beta$. Then $\varphi^* = (\alpha^* \to \bot) \to \beta^*$ and therefore, $v'(\alpha \vee \beta) = v((\alpha^* \to \bot) \to \beta^*)$. Since $\to$ and $\bot$ are interpreted as in propositional classical logic, it follows that $v'(\alpha \vee \beta) = v(\varphi^*) = 1$ iff $v'(\alpha) = v(\alpha^*) = 1$ or $v'(\beta) = v(\beta^*) = 1$.

b) $\varphi = \alpha \wedge \beta$. Then $\varphi^* = \big(\alpha^* \to (\beta^* \to \bot)\big) \to \bot$ and therefore, $v'(\alpha \wedge \beta) = v\Big(\big(\alpha^* \to (\beta^* \to \bot)\big) \to \bot\Big)$. By an argument as in the previous item, it follows that $v'(\alpha \wedge \beta) = v(\varphi^*) = 1$ iff $v'(\alpha) = v(\alpha^*) = 1$ and $v'(\beta) = v(\beta^*) = 1$. □

The next lemma establishes that, given a model (or counter-model) for a formula φ in the logics defined in the $\Sigma^\bot$ signature, there also exists a model (or counter-model) for $\varphi^{\circledast}$ in the logics defined in the $\Sigma^{\wedge,\vee}$ signature. Similarly, given a model (or counter-model) for a formula φ in the logics defined in the $\Sigma^{\wedge,\vee}$ signature, there also exists a model (or counter-model) for φ^* in the logics defined in the $\Sigma^\bot$ signature. As it will become clear later on, this result suffices to prove that the translations in question are conservative ones.

Lemma 35.
1. Let $v \in V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}$ (resp. $v \in V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$). Therefore exists $v' \in V^{\mathbf{mbC}^{\bot}}$ (resp. $v' \in V^{\mathbf{mCi}^{\bot}}$) such that $v'(\varphi^*) = v(\varphi)$, for every $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$.
2. Let $v \in V^{\mathbf{mbC}^{\bot}}$ (resp. $v \in V^{\mathbf{mCi}^{\bot}}$). Therefore exists $v' \in V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}$ (resp. $v' \in V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$) such that $v'(\varphi^{\circledast}) = v(\varphi)$, for every $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\bot}}$.

Proof. 1. Let v be a bivaluation for $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$. Define a mapping $v' : \mathcal{L}_{\Sigma^\bot} \to \{0,1\}$ by induction on the complexity of the formulas $\psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^\bot}$ as follows:

- If $\psi = q \in Var$ then $v'(q) = v(q)$.
- If $\psi = \bot$ then $v'(\bot) = 0$.
- If $\psi = \delta \to \gamma$ then $v'(\delta \to \gamma) = 1$ iff $v'(\delta) = 0$ or $v'(\gamma) = 1$.
- If $\psi = \neg\gamma$, then

$$v'(\neg\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } v'(\gamma) = 0 \\ v(\neg\delta) & \text{if } \neg\gamma = (\neg\delta)^* \\ \text{arbitrary} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- If $\psi = \circ\gamma$, then

$$v'(\circ\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{if } v'(\gamma) = v'(\neg\gamma) = 1 \\ v(\circ\delta) & \text{if } \circ\gamma = (\circ\delta)^* \\ \text{arbitrary} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Using Corollary 33 it is easy to prove, by induction on the complexity of formulas, that v' is well-defined and $v'(\varphi^*) = v(\varphi)$ for every $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$. Additionally, $v' \in V^{\mathbf{mbC}^{\perp}}$, by the proof of Lemma 20.

Now, if $v \in V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$, the definition of v' is as above, but with the following modifications:

- If $\psi = \neg\gamma$ but $\gamma \neq \neg^k\circ\delta$ for every $k \geq 0$ and every δ, then $v'(\neg\gamma)$ is defined as above. Otherwise, if $\psi = \neg\gamma$ for $\gamma = \neg^k\circ\delta$ then $v'(\neg\gamma) = 1$ iff $v'(\gamma) = 0$.
- If $\psi = \circ\gamma$, then $v'(\circ\gamma) = 0$ iff $v'(\gamma) = v'(\neg\gamma) = 1$.

By induction again, it is easy to prove that v' is a well-defined bivaluation for $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$ such that $v'(\varphi^*) = v(\varphi)$ for every formula $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$.

2. Let v be a bivaluation for $\mathbf{mbC}^{\perp}$. Consider a mapping $v' : \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}} \to \{0, 1\}$ defined by induction as follows:

- If $\psi = q \in Var$ then $v'(q) = v(q)$.
- If $\psi = \delta \wedge \gamma$ then $v'(\delta \wedge \gamma) = 1$ iff $v'(\delta) = v'(\gamma) = 1$.
- If $\psi = \delta \vee \gamma$ then $v'(\delta \vee \gamma) = 0$ iff $v'(\delta) = v'(\gamma) = 0$.
- If $\psi = \delta \to \gamma$ then $v'(\delta \to \gamma) = 1$ iff $v'(\delta) = 0$ or $v'(\gamma) = 1$.
- If $\psi = \neg\gamma$, then

$$v'(\neg\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } v'(\gamma) = 0 \\ v(\neg\delta) & \text{if } \neg\gamma = (\neg\delta)^{\circledast} \\ \text{arbitrary} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- If $\psi = \circ\gamma$, then

$$v'(\circ\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{if } v'(\gamma) = v'(\neg\gamma) = 1 \\ v(\circ\delta) & \text{if } \circ\gamma = (\circ\delta)^{\circledast} \\ \text{arbitrary} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

By Corollary 33 it is straightforward to prove, by induction on the complexity of formulas, that v' is well-defined and $v'(\varphi^{\circledast}) = v(\varphi)$ for every $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\bot}}$. Moreover, $v' \in V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}$, by the proof of Lemma 20.

Now, if $v \in V^{\mathbf{mCi}^{\bot}}$, the definition of v' is modified as in the proof item 1. $\square$

The equivalence between these logics in the different languages can then be established in Theorem 37 as a consequence of the following:

Lemma 36. *The functions* $^{*} : \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}} \to \mathcal{L}_{\Sigma^{\bot}}$ *and* $^{\circledast} : \mathcal{L}_{\Sigma^{\bot}} \to \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ *satisfy the following:*

$$\begin{array}{ccc}
\vdash_{\mathbf{mbC}^{\bot}} \varphi & \iff & \vdash_{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}} \varphi^{\circledast} \\
\vdash_{\mathbf{mCi}^{\bot}} \varphi & \iff & \vdash_{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}} \varphi^{\circledast} \\
\vdash_{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}} \varphi & \iff & \vdash_{\mathbf{mbC}^{\bot}} \varphi^{*} \\
\vdash_{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}} \varphi & \iff & \vdash_{\mathbf{mCi}^{\bot}} \varphi^{*}
\end{array}$$

Proof. Only the first and last statements will be proved, as the others have a similar demonstration. As a consequence of the completeness for the logics in both languages, the present lemma can be proved by using bivaluation semantics, namely:

$$\begin{array}{ccc}
\models_{V^{\mathbf{mbC}^{\bot}}} \varphi & \iff & \models_{V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}} \varphi^{\circledast} \\
\models_{V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}} \varphi & \iff & \models_{V^{\mathbf{mCi}^{\bot}}} \varphi^{*}
\end{array}$$

or equivalently, by contraposition:

$$\begin{array}{ccc}
\exists v \in V^{\mathbf{mbC}^{\bot}} : v(\varphi) = 0 & \iff & \exists v \in V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}} : v(\varphi^{\circledast}) = 0 \\
\exists v \in V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}} : v(\varphi) = 0 & \iff & \exists v \in V^{\mathbf{mCi}^{\bot}} : v(\varphi^{*}) = 0\,.
\end{array}$$

For the first equivalence, suppose that there exists $v \in V^{\mathbf{mbC}^{\bot}}$ such that $v(\varphi) = 0$. By Lemma 35, Item 2, there exists $v' \in V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}$ such that $v'(\varphi^{\circledast}) = v(\varphi) = 0$. On the other hand, if $v(\varphi^{\circledast}) = 0$ for some $v \in V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}$ then, by Lemma 34, Item 1, there exists $v' \in V^{\mathbf{mbC}^{\bot}}$ such that $v'(\varphi) = v(\varphi^{\circledast}) = 0$.

Now, suppose that there exists $v \in V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$ such that $v(\varphi) = 0$. By Lemma 35, Item 1, there exists $v' \in V^{\mathbf{mCi}^{\bot}}$ such that $v'(\varphi^{*}) = v(\varphi) = 0$. Conversely, if $v(\varphi^{*}) = 0$ for some $v \in V^{\mathbf{mCi}^{\bot}}$ then, by Lemma 34, Item 2, there exists $v' \in V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$ such that $v'(\varphi) = v(\varphi^{*}) = 0$. $\square$

Theorem 37. *The mapping* $^{\circledast} : \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}} \to \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ *is a conservative translation from* $\mathbf{mbC}^{\perp}$ *to* $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ *and from* $\mathbf{mCi}^{\perp}$ *to* $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$*. The mapping* $^{*} : \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}} \to \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$ *is a conservative translation from* $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ *to* $\mathbf{mbC}^{\perp}$ *and from* $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$ *to* $\mathbf{mCi}^{\perp}$.

Proof. It is a direct consequence of Theorem 28 and Lemma 36. □

Remark 38. *The last result deserves some comments. Observe that E. Jeřábek proved recently in (Jeřábek 2012) that almost any two reasonable deductive systems (namely, extensions of a certain fragment of full Lambek calculus FL) can be conservatively translated into each other. Thus, the existence of conservative translations as the ones we found above should not be surprising.*

As a consequence of Jeřábek's result, several positions could be adopted. Under a pessimistic vision, conservative translations would be useless as it is always possible to find such a mapping between two given logics. But there is another, more interesting perspective: one of the main questions on the subject of translation between logics, namely "there exists a conservative translation between logics $\mathscr{L}_1$ *and* $\mathscr{L}_2$*", has changed to "this specific function is a conservative translation between logics* $\mathscr{L}_1$ *and* $\mathscr{L}_2$*". That is, the existence of a conservative translation between two given logics is no longer interesting (as it is always true), but the important point now is to establish a conservative translation with informational content, as the ones we obtained in Theorem 37. In the present case, they state that, in fact,* $\mathbf{mbC}^{\perp}$ *is a reformulation of* **mbC** *in the signature* $\Sigma^{\perp}$*. The same holds for* $\mathbf{mCi}^{\perp}$ *and* **mCi**.

It is worth noting that the definition of $\vee$ inside $\mathbf{mbC}^{\perp}$ must be exactly as we propose: if disjunction is interpreted as usual just in terms of the implication, the resulting mapping is no longer a conservative translation:

Proposition 39. *Let* $^{*} : \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}} \to \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$ *be the translation mapping of Definition 30 except for the clause for* $\vee$*, which is replaced by the following:* $(\alpha \vee \beta)^{*} = (\alpha^{*} \to \beta^{*}) \to \beta^{*}$*. Then the mapping* * *thus defined, even though it is a translation from* $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ *to* $\mathbf{mbC}^{\perp}$*, it is not a conservative one. The same result holds for* $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$ *and* $\mathbf{mCi}^{\perp}$.

Proof. First observe that both formulas $\alpha \vee \beta$ and $(\alpha \to \beta) \to \beta$ are translated into the same formula:

$$(\alpha \vee \beta)^* = (\alpha^* \to \beta^*) \to \beta^* = ((\alpha \to \beta) \to \beta)^*,$$

thus the translation is not injective. Moreover, there is a way to choose a formula such that its translation under * is a theorem, but there is some other formula translated to the same theorem which is not a theorem of the source logic. Consider, for instance, the formula:

$$\varphi = \neg\Big(\circ(\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \beta)\Big)\,.$$

It is easy to see that φ^* is a theorem of $\mathbf{mbC}^{\perp}$, and φ is also a theorem of $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ (the same holds for **mCi**). But now consider the following formula:

$$\psi = \neg\Big(\circ((\alpha \to \beta) \to \beta) \wedge \neg(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \beta)\Big)\,.$$

It is straightforward to prove that $\psi^* = \varphi^*$, but ψ is not a theorem in the source logic. This shows that, if $\mathscr{L} \in \{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}, \mathbf{mCi}^{\wedge\vee}\}$ represents some of the two logics in the old signature and $\mathscr{L}'$ is the same logic in the new signature, then

$$\vdash_{\mathscr{L}} \psi \qquad \not\Longleftarrow \qquad \vdash_{\mathscr{L}'} \psi^*. \qquad \square$$

This illustrates the impact of a logic not being self-extensional (see Section 2), and draws our attention to the care required when dealing with this kind of logics. As the proposition above shows, the right translation of disjunctions inside $\mathbf{mbC}^{\perp}$ is through the schema formula that uses $\to$ and $\perp$.

5. Sequents for mbC and mCi

Some work grounded on the sequent formalism has already been made for the **LFI**s. For instance, the logics **bC** and **Ci**, which respectively extend $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ and $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$ by the addition of the axiom scheme:

$$\neg\neg\alpha \to \alpha \qquad \textbf{(cf)}$$

were formulated as the sequents systems **BC** and **CI** in (Gentilini 2011) and proved to admit cut elimination (as well as many other **LFI**s extending them). In (Rodrigues 2010), it can be found a proof of the cut elimination for **QMBC**, the first order extension of the fragment of **BC** suited to characterize $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$. A method for obtaining cut-free sequent calculi for C-systems characterizable by finite Nmatrices is presented in (Avron, Konikowska, and Zamansky 2013) — although the method developed there is of a general character, the basic logic considered is slightly stronger than **mbC**.[3] In the present section sequents systems for $\mathbf{mbC}^{\perp}$ and $\mathbf{mCi}^{\perp}$ are presented and proved to admit cut-elimination. This is an intentionally self-contained section, and so it is long. The reader already acquainted with the notions and techniques of sequent calculi and proofs of cut-elimination can ignore most of the concepts and basic facts described herein.

5.1. Sequents Systems MBC and MCI

Along the present section, sets of formulas will be understood as *multi-sets*, that is, sets in which the elements can appear with multiplicity. In a given multi-set, some formula φ may have more than one *occurrence*, and each occurrence is distinct from the other, even if they correspond to the same formula. As with the usual sets, the order in which the elements occur in a multi-set does not matter.

Definition 40 (Sequent)**.** Sequents are pairs of multi-sets of formulas and are designated by the following notation:

$$\Gamma \;\longmapsto\; \Delta\,,$$

in which Γ and Δ are multi-sets of formulas.

Sometimes it is necessary to draw attention to some formula occurrences in a given sequent. Then such occurrences are indicated by meta-variables for occurrences (lower case greek letters), contrasting with those for multi-sets (upper case greek letters). Such occurrences are called *designated occurrences*. For instance, in the following sequent:

$$\Delta, \delta \;\longmapsto\; \Gamma, \gamma$$

the occurrence of δ to the left and γ to the right are designated occurrences. That being said, sequent calculi can be defined by enumerating their *sequent rules*:

Definition 41 (Sequent Rule, Antecedent, Succedent)**.** *Sequent rules* are pairs whose first element is a sequence of sequents, called the *antecedent*, and the second is a single sequent, called the *succedent*, and these pairs are restricted to the conditions of Definition 43.

It is allowed for the antecedent of a sequent rule to be the empty sequence, and this is the simplest case of a sequent rule. In such cases the sequent rule is called an *axiom*:

Definition 42 (Axiom)**.** An *axiom* is any sequent rule whose antecedent is the empty sequence.

Although, there are some conditions for a given pair of antecedent and succedent to be considered a sequent rule:

Definition 43 (Occurrences Consumed and Produced)**.** In any sequent rule all occurrences of formulas present in a given side of some sequent in the antecedent, if there are any, must also be present on the same side of the succedent, except maybe for some occurrences which are said to have been *consumed*. Also all occurrences of formulas present in a given side of the succedent are taken from this same side on some of the antecedent's sequents, except maybe for one or two which are said to have been *produced*. Axiom rules are the only rules allowed to produce more than one formula occurrence.

This induces a relation on the formula occurrences of a sequent rule:

Definition 44 (Successor, Predecessor, Principal Formula Occurrence)**.** Each formula occurrence in the succedent of a sequent rule not produced by it is the *successor* of the corresponding occurrence in the antecedent, which is called its *predecessor*. The occurrences produced by the rule are the successors of those consumed and these, their predecessors. The *principal formula occurrences* of a sequent rule are those produced by this rule.

From this definition it follows that in a rule with empty antecedent, all formula occurrences in the succedent are principal and have no predecessors. Observe that it can be rules producing formula occurrences without consuming any and also rules consuming and not producing. The rules of sequent calculi are designed to be chained together in order to constitute proofs:

Definition 45 (Sequent Derivation)**.** For a given set of sequent rules, a *sequent derivation* is an upside down finite tree whose nodes are sequent rules and an edge between them can be established whenever a sequent in the antecedent of some node is the same as the succedent of some other node; in the case in which an edge is actually established the sequents are said to *participate* in this given edge. It is not allowed to be any node with a non participating sequent, except for the succedent of the root node, as well as any sequent must not participate in more than one edge. It is said that a given sequent derivation *derives*, is a *derivation for*, or *concludes* its root's succedent. It is said that the root's succedent is the *conclusion* of the sequent derivation.

From this definition it is clear that in the leaves of a sequent derivation tree are present only axioms from the set of the sequent rules. A sequent calculus $\mathscr{S}$ is identified with the enumeration of its sequent rules. For a given sequent calculus $\mathscr{S}$, it is represented that some sequent derivation ϖ derives the sequent $\Delta \longmapsto \Gamma$ by the following notation:

$$\begin{array}{c} \vdots\, \varpi \\ \Gamma \longmapsto \Delta \end{array}$$

or that ϖ derives $\Delta \longmapsto \Gamma$, its last rule is $\mathbf{R}$ and ϖ' is one of its sub-derivations:

$$\left.\begin{array}{c} \vdots\, \varpi' \\ \hline \Gamma \longmapsto \Delta \end{array} : \mathbf{R} \right\} \varpi$$

Concrete examples of sequent rules are the rules for contractions, whose definition is neecessary to be given earlier than those for the other rules, in order to properly define what means for formula to be introduced by some rule in a derivation:

Definition 46 (Contraction Rules)**.** For any multi-sets Γ and Δ of formulas of a given language $\mathcal{L}$ and formula $\alpha \in \mathcal{L}$, the following are contraction rules:

$$\frac{\Gamma, \alpha, \alpha \ \longmapsto \ \Delta}{\Gamma, \alpha \ \longmapsto \ \Delta} \quad (\textbf{Ct-L}) \qquad \frac{\Gamma \ \longmapsto \ \Delta, \alpha, \alpha}{\Gamma \ \longmapsto \ \Delta, \alpha} \quad (\textbf{Ct-R})$$

The relations of predecessor and successor on the formula occurrences of the sequent rules induce other relations on the occurrences of the entire derivation:

Definition 47 (Ancestor, Descendant, Formula Introduced by Rule)**.** An occurrence of a formula α in a sequent derivation is called the *ancestor* of a occurrence of a formula ω if these occurrences are the same occurrence of the same sequent or if the occurrence of α is the predecessor of an ancestor of the occurrence of ω. The occurrence of ω is then called a *descendant* of the occurrence of α and it is called a *integral descendant* if $\alpha = \omega$, in which case the occurrence of α is called a *direct ancestor* of the one of ω. If the occurrence of some formula ω has a direct ancestor which is principal for some application of a rule **R** different from a contraction, then this occurrence is said to be *introduced by **R***.

Observe that, due to contractions, a formula occurrence may be introduced by several rules.

Definition 48 (Derivation Height)**.** The *height of a derivation* ϖ is the height of the tree which constitutes it and it is denoted by $h(\varpi)$.

Now, the sequent calculi subject of the present section are introduced by the enumeration of their rules. Let Γ and Δ, followed or not by primes ($'$), be any multi-sets of formulas of $\mathcal{L}_{\Sigma^\perp}$ and φ, α or β be any formulas in this same language. The sequent calculi here presented are formed by the following sequent rules:

Definition 49 (**MBC**)**.**

- **Axioms**

$$\frac{}{\varphi \ \longmapsto \ \varphi} \quad (\textbf{Ax}) \qquad \frac{}{\bot \ \longmapsto} \quad (\bot\textbf{L})$$

- **Structural Rules**

$$\frac{\Gamma \longmapsto \Delta}{\Gamma, \alpha \longmapsto \Delta} \quad (\textbf{Wk-L}) \qquad \frac{\Gamma \longmapsto \Delta}{\Gamma \longmapsto \Delta, \alpha} \quad (\textbf{Wk-R})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \alpha \longmapsto \Delta}{\Gamma, \alpha \longmapsto \Delta} \quad (\textbf{Ct-L}) \qquad \frac{\Gamma \longmapsto \Delta, \alpha, \alpha}{\Gamma \longmapsto \Delta, \alpha} \quad (\textbf{Ct-R})$$

$$\frac{\Gamma \longmapsto \Delta, \alpha \quad \alpha, \Gamma' \longmapsto \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \longmapsto \Delta, \Delta'} \quad (\textbf{Cut})$$

- **Classic Logical Rules**

$$\frac{\Gamma \longmapsto \Delta, \alpha \quad \beta, \Gamma' \longmapsto \Delta'}{\alpha \to \beta, \Gamma, \Gamma' \longmapsto \Delta, \Delta'} \quad (\to\textbf{E}) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \longmapsto \beta, \Delta}{\Gamma \longmapsto \alpha \to \beta, \ \Delta} \quad (\to\textbf{D})$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \longmapsto \Delta}{\Gamma \longmapsto \Delta, \neg\alpha} \quad (\neg\textbf{R})$$

- **Paraconsistent Logical Rule**

$$\frac{\circ\alpha, \Gamma \longmapsto \Delta, \alpha}{\circ\alpha, \neg\alpha, \Gamma \longmapsto \Delta} \quad (\neg\textbf{L})$$

Definition 50 (**MCI**). All the rules from **MBC** plus the following:

- **Paraconsistent Logical Rules**

$$\frac{\Gamma \longmapsto \Delta,\, \neg^{n}\circ\alpha}{\neg^{n+1}\circ\alpha,\, \Gamma \longmapsto \Delta}\ (\neg\circ\mathbf{L}) \qquad \frac{\alpha,\, \neg\alpha,\, \Gamma \longmapsto \Delta}{\Gamma \longmapsto \Delta,\, \circ\alpha}\ (\circ\mathbf{R})$$

In the above definitions, all designated formula occurrences stand for those produced or consumed by the rule in which they appear, except for $\circ\alpha$ in $\neg$**L**. In this rule, the occurrence of α present on the right of the unique sequent of its antecedent is consumed and the one of $\neg\alpha$, present on the left of its succedent, is produced. The designated occurrence of $\circ\alpha$ to the left of the sequents is not modified by the rule, but is present to restrict the applicability of the rule only to sequents in which the assumption of the consistency of α is granted. This occurrence is called, following (Gentilini 2011), a *constraint formula occurrency*.

Definition 51. For a given bivaluation v a sequent $\Gamma \longmapsto \Delta$ is said to *hold* for v if there is an occurrence of $\gamma \in \Gamma$ such that $v(\gamma) = 0$ or there is an occurrence of $\delta \in \Delta$ such that $v(\delta) = 1$.

Theorem 52 (Soundness of the Sequent Calculi)**.** *If* $\Gamma \longmapsto \Delta$ *is derivable in* **MBC** *(resp.* **MCI***), then* $\Gamma \longmapsto \Delta$ *holds for all bivaluations* $v \in V^{\mathbf{mbC}^{\perp}}$ *(resp.* $v \in V^{\mathbf{mCi}^{\perp}}$*).*

Proof. It is left for the reader to check that for all bivaluations $v \in V^{\mathbf{mbC}^{\perp}}$ and instances r of rules of **MBC**, if $\Gamma_i \longmapsto \Delta_i$ holds for v for the sequents $\Gamma_i \longmapsto \Delta_i$ in the antecedent of r, then the sequent $\Gamma \longmapsto \Delta$ in the succedent of r also holds for it. The same is required for **MCI** and $V^{\mathbf{mCi}^{\perp}}$. □

The remaining of this subsection is devoted to show that the sequent calculi defined are indeed equivalent to the corresponding hilbertian logics.

Lemma 53. *Let* $\mathscr{S}$ *be* **MBC** *or* **MCI**. *If* $\Gamma \longmapsto \alpha \to \beta$ *is derivable in* $\mathscr{S}$*, then so it is* $\Gamma, \alpha \longmapsto \beta$*.*

Proof. It is left for the reader (only **Ax**, $\to$**E** and **Cut** are required). □

Corollary 54. *Let $\mathscr{S}$ be* **MBC** *of* **MCI***, the sets $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$, Γ being a finite multi-set such that $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ and $\psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$. Thus, there exists a derivation ϖ in $\mathscr{S}$ for the sequent $\Delta, \Gamma \longmapsto \psi$ if, and only if, there exists a derivation ϖ' in $\mathscr{S}$ for the sequent $\Delta \longmapsto \gamma_1 \to (\gamma_2 \to \ldots (\gamma_n \to \psi) \ldots)$.*

Proof. It also presents no difficulties. Proceed by induction on n, aplying Lemma 53 and $\to$**D**. □

Lemma 55. *Let $\mathscr{L}$ be* **mbC**$^{\perp}$ *or* **mCi**$^{\perp}$ *and $\mathscr{S}$ be, respectively,* **MBC** *or* **MCI***. Then φ is derivable in $\mathscr{L}$ if, and only if, there exists a sequent derivation ϖ in $\mathscr{S}$ for the sequent $\longmapsto \varphi$.*

Proof. 1. Suppose $\vdash_{\mathscr{L}} \varphi$ and proceed by induction on the length of the demonstration to obtain $\longmapsto \varphi$. Here will only be given the cases when the demonstration ends in the Axiom **bc1**$^{\perp}$ from **mbC**$^{\perp}$ and in **MP**:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha \longmapsto \alpha}\ \textbf{Ax}}{\circ\alpha, \alpha \longmapsto \alpha, \perp}\ \textbf{Wk-L}, \textbf{Wk-R}}{\circ\alpha, \neg\alpha, \alpha \longmapsto \perp}\ \neg\textbf{L}}{\longmapsto \circ\alpha \to (\neg\alpha \to (\alpha \to \perp))}\ \to\textbf{D}(3\text{x})$$

Suppose now that the derivation $\vdash_{\mathscr{L}} \varphi$ ends in an application of **MP** on the formulas γ and $\gamma \to \varphi$. By induction hypothesis, there are derivations ϖ and ϖ' in $\mathscr{S}$ for the sequents $\longmapsto \gamma$ and $\longmapsto \gamma \to \varphi$, respectively. Now it is going to be proved that $\mathscr{S}$ can simulate this **MP**. The following derivation can then be constructed in $\mathscr{S}$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \varpi \\ \longmapsto \gamma\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \varpi' \\ \longmapsto \gamma \to \varphi\end{array}}{\gamma \longmapsto \varphi}\ \text{Theorem 53}}{\longmapsto \varphi}\ \textbf{Cut}$$

2. If there is a derivation ϖ in $\mathscr{S}$ for $\longmapsto \varphi$, then, by Theorem 52, $v(\varphi) = 1$ for all bivaluations for $\mathscr{L}$. By completeness, φ is a theorem of $\mathscr{L}$.

□

Theorem 56. *Let $\mathscr{L}$ be* **mbC**$^{\perp}$ *or* **mCi**$^{\perp}$ *and $\mathscr{S}$ be, respectively,* **MBC** *or* **MCI**. *Then $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \psi$ if, and only if, there exists a finite subset $\Gamma^{\circ} \subseteq \Gamma$ such that $\Gamma^{\circ} \longmapsto \psi$ is derivable in $\mathscr{S}$.*

Proof. By the finitariness and monotonicity of $\mathscr{L}$, $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \psi$ if, and only if, there is a finite subset $\Gamma^{\circ} \subseteq \Gamma$ such that $\Gamma^{\circ} \vdash_{\mathscr{L}} \psi$. Now, let $\Gamma^{\circ} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$. As $\to$ in these logics observes the MTD, $\Gamma^{\circ} \vdash_{\mathscr{L}} \psi$ if, and only if, $\vdash_{\mathscr{L}} \gamma_1 \to (\gamma_2 \to \ldots (\gamma_n \to \psi) \ldots)$. By Lemma 55, this is the case if, and only if, there is a derivation in $\mathscr{S}$ for $\longmapsto \gamma_1 \to (\gamma_2 \to \ldots (\gamma_n \to \psi) \ldots)$. By Corollary 54, this is the case if, and only if, there is a derivation in $\mathscr{S}$ for $\Gamma^{\circ} \longmapsto \psi$. □

5.2. Cut Elimination for MBC and MCI

In this subsection, the cut-elimination theorem is established for both systems **MBC** and **MCI**. The method used here is drawn from the one found in (Girard, Taylor, and Lafont, 1989) for classical logic, although it does not fit so elegantly as in the original. The reader not interested in syntactical details can safely skip this section.

Definition 57 (Cut Complexity, Cutting Formula)**.** The *complexity of an application of the **Cut** rule* is the complexity of the formula whose occurrences are consumed by this **Cut**, which is called its *cutting formula*.

Definition 58 (Derivation Complexity)**.** The *cut complexity of a sequent derivation* is the maximum value of the cut complexity of all cut applications occurring on it. If there is no such an aplication, the cut complexity of the derivation is 0.

Lemma 59. *Let π be a derivation in $\mathscr{S} \in \{$**MBC**, **MCI**$\}$ of the sequent $\Gamma \longmapsto \Delta$ and φ be a formula occurring in Δ introduced only by **Wk-R**. Thus it can be constructed a proof in $\mathscr{S}$ for the sequent $\Gamma \longmapsto \Delta - \varphi$ with the same cut complexity of π and in which all formula occurrences in the concluding sequent $\Gamma \longmapsto \Delta - \varphi$ are introduced by the same rules introducing the corresponding occurrences in the concluding sequent $\Gamma \longmapsto \Delta$ of π.*

Proof. It suffices to remove from π all ancestors of the occurrences of φ in Δ, and maybe some applications of **Ct-R** on them, up to the introductory application(s) of **Wk-R** and then removing this(these) very application(s). It can be seem that this process will not break any rules or result in a ill-formed derivation. □

Corollary 60. *Let π be a derivation in $\mathscr{S} \in \{$***MBC***,* **MCI***$\}$ of the sequent $\Gamma \longmapsto \Delta$. Then there exists a derivation π' in $\mathscr{S}$ of the sequent $\Gamma \longmapsto \Delta - \bot$ with the same cut complexity of π and in which all formula occurrences of the concluding sequent $\Gamma \longmapsto \Delta - \bot$ are introduced by the same rules introducing the corresponding occurrences in the concluding sequent $\Gamma \longmapsto \Delta$ of π.*

Proof. Observe that there is no rule in **MBC** or **MCI** introducing $\bot$ to the right. Thus all occurrences of it in Δ must be introduced only by **Wk-R** and the result follows from Lemma 59. □

Lemma 61. *Let $\mathscr{S}$ be* **MBC** *or* **MCI***, π be a sequent derivation in $\mathscr{S}$ for $\Gamma \longmapsto \Delta, \varphi$ and ϖ be a sequent derivation in $\mathscr{S}$ for $\Lambda, \varphi \longmapsto \Xi$. If the designated occurrence of φ is introduced in π by a selected application of* ***Ax*** *and some other rules (including maybe another different applications of* ***Ax****), then there is a sequent derivation π' in $\mathscr{S}$ for $\Gamma, \Lambda \longmapsto \Delta, \Xi, \varphi$:*

$$\begin{array}{c} \vdots\, \pi' \\ \Gamma, \Lambda \longmapsto \Delta, \Xi, \varphi \end{array}$$

whose cut complexity is the maximum of those of π and ϖ and in which the occurrence of φ designated in the concluding sequent is introduced by the same rules as those introducing the designated one in the conclusion of π, except for the selected application of ***Ax****. Also all other formula occurrences in the concluding sequent of π' are introduced exactly by the same rules which introduce the corresponding occurrences in the conclusions of π or ϖ. Moreover, if the occurrence of φ in the conclusion of π is introduced only by the selected application of* ***Ax****, then the proof π' can be constructed for $\Gamma, \Lambda \longmapsto \Delta, \Xi$:*

$$\begin{array}{c} \vdots\, \pi' \\ \Gamma, \Lambda \longmapsto \Delta, \Xi \end{array}$$

and, as well, the cut-complexity of π' is the maximum of those of π and ϖ and in this proof all formula occurrences in the conclusion are introduced *exactly by the same rules which introduce the corresponding occurrences in the conclusions of π or ϖ.*

Proof. Let r be the last rule of π. The proof goes by induction on $h(\pi)$. If $h(\pi) = 1$, the derivation π is restricted to a single application of **Ax** or $\perp$**L**. If $r = \perp$**L**, then $\varphi = \perp$ and it is not introduced by **Ax** and then the result trivially holds. If $r =$ **Ax**, by the hypothesis on the concluding sequent of π, the rule r must be an application of **Ax** introducing φ, and also $\Gamma = \{\varphi\}$ and $\Delta = \{\}$. Observe that this is the only rule introducing φ and thus it suffices to take π' as ϖ. Suppose now that $h(\pi) > 1$ and that the result holds good for all sequent derivations ρ for which $h(\rho) < h(\pi)$.

Suppose now that the designated occurrence of φ is not produced by r and that r is any rule in which there is only one sequent in its antecedent. Let π_1 be the sub-derivation for the unique sequent in the antecedent of r, the sets Θ_1 and Θ_2 be the multi-sets formed by the formula occurrences consumed by r, and Π_1 and Π_2 the multi-sets formed by the occurrence produced by r. Thus, the proof π can be depicted as follows:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma', \Theta_1 \;\longmapsto\; \Delta', \Theta_2, \varphi\end{array}}{\Gamma', \Pi_1 \;\longmapsto\; \Delta', \Pi_2, \varphi}\; r$$

in which the multi-sets of the succedent of r are such that $\Gamma = \Gamma' \cup \Pi_1$ and $\Delta = \Delta' \cup \Pi_2$. Observe that the designated occurrence of φ in the conclusion of π is introduced exactly by the same rules which introduce the designated occurrence of φ in the conlcusion of π_1.

Observe also that, as the rules considered produce exactly one formula occurrence, the multi-sets Π_i cannot be both different from $\emptyset$ at the same time for the same rule r. For instance, if $r = \rightarrow$**D**, then $\Pi_1 = \emptyset$, $\Pi_2 = \alpha \rightarrow \beta$ and the multi-sets of consumed occurrences are then $\Theta_1 = \{\alpha\}$ and $\Theta_2 = \{\beta\}$. If $r =$ **Wk-L**, then $\Pi_2 = \Theta_1 = \Theta_2 = \emptyset$ and Π_1 is the singleton formed by the formula produced by r. Now, let $\Phi = \{\}$ if the designated occurrence of φ is introduced only by the selected application of **Ax** or $\Phi = \{\varphi\}$ otherwise. By induction hypothesis on π_1 and ϖ, there is a sequent derivation π_1' for $\Gamma', \Theta_1, \Lambda \;\longmapsto\; \Delta', \Theta_2, \Xi, \Phi$. The cut-complexity of π_1' is the maximum of those of π_1 and ϖ. If $\Phi \neq \{\}$, the occurrence of $\varphi \in \Phi$ in the conclusion of π_1'

is introduced by the same rules as those introducing the one in the conclusion of π_1, which coincide with those introducing φ in the conclusion of π, except for the selected application of **Ax**. Also all other formula ocurrences are introduced exactly by the same rules that introduce the corresponding occurrences in π_1 or ϖ. Now, let π' be the derivation constructed from π'_1 by the application of r:

$$\left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \pi'_1 \\ \Gamma', \Theta_1, \Lambda \;\longmapsto\; \Delta', \Theta_2, \Xi, \Phi\end{array}}{\Gamma', \Pi_1, \Lambda \;\longmapsto\; \Delta', \Pi_2, \Xi, \Phi}\, r\right\}\pi'$$

This is possible because the only requirements for r to be applied, except in the case in which $r = \neg\mathbf{L}$, are satisfied by the presence of the multi-sets Θ_i of formula occurrences to be consumed by it. If $r = \neg\mathbf{L}$, introducing, say, an occurrence of a formula $\neg\alpha$, there also must be an occurrence of $\circ\alpha \in \Gamma'$ in order for r to be applied. However, this is always the case, as r is already employed in π, and this guarantees the occurrence of $\circ\alpha$ in Γ'. Observe that all formula ocurrences in the conclusion of π', other than the one in Φ, are introduced exactly by the same rules that introduce the corresponding occurrences in the conclusions of π or ϖ.

Now, suppose r has two sequents in its antecedent and does not produce the designated occurrence of φ. Therefore $r \in \{\rightarrow\mathbf{E}, \mathbf{Cut}\}$. Let π_1 and π_2 be the sequent derivations of the sequents in the antecedent of r and suppose the designated occurrence of φ in the conclusion of π has as its predecessor an occurrence in the conclusion of π_2. Let Π be the set formed by the occurrence produced by r (or the empty set, if there is none):

$$\left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \pi_1 \\ \Gamma_1 \;\longmapsto\; \Delta_1, \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, \pi_2 \\ \Gamma_2, \beta \;\longmapsto\; \Delta_2, \varphi\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Pi \;\longmapsto\; \Delta_1, \Delta_2, \varphi}\, r\right\}\pi$$

Observe that the designated occurrence of φ in the conclusion of π is introduced exactly by the same rules which introduce the designated occurrence of φ in the conlcusion of π_2. Now, let $\Phi = \{\}$ if the designated occurrence of φ is introduced only by the selected application of **Ax** or $\Phi = \{\varphi\}$ otherwise.

Let π_2' be obtained by the induction hypothesis on π_2 and ϖ. Thus, π' is the derivation constructed from π_1 and π_2' by the application of r on α and β:

$$\left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \longmapsto \Delta_1, \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma_2, \beta, \Lambda \longmapsto \Delta_2, \Xi, \Phi\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Pi, \Lambda \longmapsto \Delta_1, \Delta_2, \Xi, \Phi}\, r \right\} \pi'$$

The case in which the designated occurrence of φ has as its predecessor an occurrence in the conclusion of π_1 is similar. Also observe that the above derivation fits the other requirements of the present lemma.

It only remains to address the cases in which the designated occurrence of φ is produced by r. The rule r cannot be a logical rule or a **Wk-R**, as φ would then not be introduced by **Ax**. Thus, the only possible case is $r =$ **Ct-R** and then the derivation π is as follows:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \longmapsto \Delta, \varphi, \varphi\end{array}}{\Gamma \longmapsto \Delta, \varphi}\, r$$

The selected application of **Ax** introduce only one of the designated occurrences of φ in the conclusion of π_1. Let then $\Phi = \{\}$ if this occurrence is introduced only by the selected application of **Ax** or $\Phi = \{\varphi\}$ otherwise. Let π_1' be the sequent derivation obtained by induction hypothesis on π_1 and ϖ for the occurrence of φ introduced by the selected application of **Ax**:

$$\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma, \Lambda \longmapsto \Delta, \Xi, \Phi, \varphi\end{array}$$

Depending on whether $\Phi = \{\varphi\}$ or $\Phi = \{\}$, **Ct-R** is applied to the end of π_1' or not (respectively):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma, \Lambda \longmapsto \Delta, \Xi, \Phi, \varphi\end{array}}{\Gamma, \Lambda \longmapsto \Delta, \Xi, \varphi}\, (\mathbf{Ct\text{-}R})^?$$

in which $(\textbf{Ct-R})^?$ represents one or zero applications of **Ct-R**. It is not hard to see that the designated occurrence of φ in the conclusion of the above derivation is introduced by the same rules as those introducing φ in π, except for the selected application of **Ax** and that all other occurrences are introduced by the same rules introducing the corresponding occurrences in π or ϖ. The above derivation has the same cut-complexity as π_1' and so, by induction hypothesis, this is the maximum of π_1 and ϖ, what coincides with the maximum of π and ϖ. □

Corollary 62. *Let $\mathscr{S}$ be* **MBC** *or* **MCI** *and π be a sequent proof in $\mathscr{S}$ for $\Gamma \longmapsto \Delta$. Let ϖ be a sequent proof in $\mathscr{S}$ for $\Lambda, \varphi \longmapsto \Xi$ and $\widehat{\Delta}$ be the multiset obtained from Δ removing all occurrences of φ in Δ introduced only by* ***Ax*** *in the conclusion of π. Then there is a sequent derivation π' in $\mathscr{S}$ for $\Gamma, \Lambda \longmapsto \widehat{\Delta}, \Xi$ whose cut-complexity is the maximum of those of π and ϖ:*

$$\begin{array}{c} \vdots\, \pi' \\ \Gamma, \Lambda \longmapsto \widehat{\Delta}, \Xi \end{array}$$

in which all occurrences of φ in $\widehat{\Delta}$ (if there are any) are not introduced by ***Ax***.

Proof. The proof π' can be obtained by the repeatedly application of Lemma 61 on π and ϖ. □

Lemma 63. *Let ϖ be sequent proof in* **MBC** *or* **MCI** *of $\Gamma \longmapsto \Delta, \neg\varphi$:*

$$\begin{array}{c} \vdots\, \varpi \\ \Gamma \longmapsto \Delta, \neg\varphi \end{array}$$

in which the designated ocurrence of the formula $\neg\varphi$ is not introduced by ***Ax***. *Therefore there is a sequent proof ϖ' of $\Gamma, \varphi \longmapsto \Delta$ with the same cut-complexity of ϖ:*

$$\begin{array}{c} \vdots\, \varpi' \\ \Gamma, \varphi \longmapsto \Delta \end{array}$$

in which all formula ocurrences in the concluding sequent, except the one of φ designated on the left, are introduced exactly by the same rules introducing them in ϖ.

Proof. The proof goes by induction on $h(\varpi)$. If $h(\varpi) = 1$ the proof is trivial for ϖ is restricted to a single application of **Ax** or $\bot$**L** and in these cases the derivation ϖ does not fit the assumptions stated in the hypothesis. Suppose $h(\varpi) > 1$ and that the result holds good for all sequent derivations π for which $h(\pi) < h(\varpi)$. Let r be the last rule of ϖ and suppose that the designated occurrence of $\neg\varphi$ is not produced by r.

If r has only one sequent in its antecedent the proof is as follows. As in the proof of Lemma 61, let ϖ_1 be the sub-proof of the unique sequent in the antecedent of r, Θ_1 and Θ_2 be the multi-sets formed by the formulas occurrences consumed by r, and Π_1 and Π_2 multi-sets formed by the occurrence produced by r. Thus, the proof ϖ is as follows:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \varpi_1\\ \Gamma, \Theta_1 \ \longmapsto\ \Delta, \Theta_2, \neg\varphi\end{array}}{\Gamma, \Pi_1 \ \longmapsto\ \Delta, \Pi_2, \neg\varphi}\ r$$

Now, by induction hypothesis, there is a sequent derivation ϖ_1' of $\Gamma, \Theta_1, \varphi \ \longmapsto\ \Delta, \Theta_2$ in which all formula ocurrences are introduced exactly by the same rules that introduce them in ϖ_1. Let ϖ' be the derivation constructed from ϖ_1' by the application of r:

$$\left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \varpi_1'\\ \Gamma, \Theta_1, \varphi \ \longmapsto\ \Delta, \Theta_2\end{array}}{\Gamma, \Pi_1, \varphi \ \longmapsto\ \Delta, \Pi_2}\ r\ \right\}\varpi'$$

This is possible because the only requirements for r to be applied, except in the case in which $r = \neg$**L**, are satisfied by the presence of the multi-sets Θ_i of formulas to be consumed by it. If $r = \neg$**L** and its principal occurrence is of a formula $\neg\alpha$, it also must be a formula $\circ\alpha \in \Gamma$. However, this is always the case, as r is already employed in ϖ, what guarantees the presence of $\circ\alpha$ in Γ. It is easy to see that all formula ocurrences in the conclusion of ϖ' are introduced exactly by the same rules that introduce them in ϖ.

Now, suppose r has two sequents in its antecedent and, thus, $r \in \{\to$**E**, **Cut**$\}$. Let ϖ_1 and ϖ_2 be the sequent derivations of the hypotheses of r and suppose the designated occurrence of $\neg\varphi$ has as its predecessor an occurrence in the conclusion of ϖ_2. Let Π be the set formed by the occurrence produced by r (or the empty set, if there is none):

$$\left.\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vdots\,\varpi_1 & \vdots\,\varpi_2 \\ \Gamma_1 \longmapsto \Delta_1, \alpha & \Gamma_2, \beta \longmapsto \Delta_2, \neg\varphi \end{array} \\ \hline \Gamma_1, \Gamma_2, \Pi \longmapsto \Delta_1, \Delta_2, \neg\varphi \end{array}\, r \right\} \varpi$$

Now, let ϖ'_2 be obtained by the induction hypothesis on ϖ_2. Thus, ϖ' is the derivation constructed from ϖ_1 and ϖ'_2 by the application of r on α and β:

$$\left.\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vdots\,\varpi_1 & \vdots\,\varpi'_2 \\ \Gamma_1 \longmapsto \Delta_1, \alpha & \Gamma_2, \varphi, \beta \longmapsto \Delta_2 \end{array} \\ \hline \Gamma_1, \Gamma_2, \Pi, \varphi \longmapsto \Delta_1, \Delta_2 \end{array}\, r \right\} \varpi'$$

By induction hypothesis, the formula occurrences in the conclusion of the above derivation, except the one of φ designated on the left, are introduced by the same rules introducing the corresponding ones in the conclusion of ϖ. The case in which the occurrence of $\neg\varphi$ has as its predecessor an occurrence in the conclusion of ϖ_1 is similar. Now, it only remains to address the cases in which the designated occurrence of $\neg\varphi$ is the principal formula occurrence of r:

1. If $r = \neg$**R**, its principal formula occurrence is exactly the occurrence of $\neg\varphi$ in question. It suffices to take ϖ' as the sequent derivation for the only sequent in the antecedent of this application of r.

2. If $r =$ **Ct-R**, ϖ is as follows:

$$\begin{array}{c} \vdots\,\varpi_1 \\ \Gamma \longmapsto \Delta, \neg\varphi, \neg\varphi \\ \hline \Gamma \longmapsto \Delta, \neg\varphi \end{array}\, r$$

   By the induction hypothesis on ϖ_1, there is a sequent derivation ϖ'_1 such that:

$$\begin{array}{c} \vdots\,\varpi'_1 \\ \Gamma, \varphi \longmapsto \Delta, \neg\varphi \end{array}$$

As the designated occurrence of $\neg\varphi$ on the right of the conclusion of ϖ is not introduced by **Ax**, so the occurrences of this same formula designated on the right of the conclusion of ϖ_1 are not. Thus, by the induction hypothesis on ϖ_1, the designated occurrence of $\neg\varphi$ on the right of the conclusion of ϖ'_1 is not introduced by **Ax** and, by the induction hypothesis on ϖ'_1, there is a sequent derivation ϖ''_1 such that:

$$\begin{array}{c} \vdots\ \varpi''_1 \\ \Gamma, \varphi, \varphi \ \longmapsto\ \Delta \end{array}$$

and the required derivation ϖ' can be obtained from ϖ''_1 by an application of **Ct-L**.

3. If r = **Wk-R**, with principal formula occurrence the designated $\neg\varphi$, ϖ' can be obtained from the proof of the antecedent of ϖ by an application of **Wk-L**.

□

Lemma 64. *Let ϖ be sequent proof in* **MCI** *of* $\Gamma \longmapsto \Delta, \circ\varphi$*:*

$$\begin{array}{c} \vdots\ \varpi \\ \Gamma \ \longmapsto\ \Delta, \circ\varphi \end{array}$$

*in which the designated ocurrence of the formula $\circ\varphi$ in the concluding sequent is not introduced by **Ax**. Therefore there is a sequent proof ϖ' for $\Gamma, \varphi, \neg\varphi \longmapsto \Delta$ with the same cut-complexity of ϖ:*

$$\begin{array}{c} \vdots\ \varpi' \\ \Gamma, \varphi, \neg\varphi \ \longmapsto\ \Delta \end{array}$$

in which all formula ocurrences in the concluding sequent, except for those of φ and $\neg\varphi$ designated on the left, are introduced exactly by the same rules introducing them in ϖ.

Proof. The proof is very similar to the previous one and is left to the reader.

□

Lemma 65. *Let $\mathscr{S}$ be* **MBC** *or* **MCI** *and ϖ be a sequent derivation in $\mathscr{S}$ whose last rule is the application of a* ***Cut*** *on occurrences of a formula φ. Suppose also that φ is introduced to the right by the last rule r_1 of the derivation ϖ_1 for the first sequent in the antecedent of this* ***Cut****, and to the left by the last rule r_2 of the derivation ϖ_2 for the second sequent in the antecedent of this* ***Cut****:*

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\,\varpi_1}{\Gamma_1 \longmapsto \Delta_1, \varphi}\,r_1 \qquad \dfrac{\vdots\,\varpi_2}{\varphi, \Gamma_2 \longmapsto \Delta_2}\,r_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longmapsto \Delta_1, \Delta_2}\,\textbf{\textit{Cut}}$$

Suppose also that r_1 and r_2 are logical rules, and that the cut complexities of ϖ_1 and ϖ_2 are lower than that of ϖ. Then, there exists a sequent derivation ϖ' in $\mathscr{S}$ for the same sequent derived by ϖ and whose cut complexity is lower than that of ϖ.

Proof. Depending on the cut formula occurrence φ the proof is divided in some cases. The cases in which $\varphi = \bot$, $\varphi \in Var$ or $\varphi = \circ\alpha$ are impossible as there is no logical rule introducing $\bot$ to the right, no logical rule introducing $\circ\alpha$ to the left or introducing propositional variables to any side at all. The case in which $\varphi = \alpha \to \beta$ is the same as for classical logic and is left for the reader to check. For the remaing cases, $\varphi = \neg\alpha$, $r_1 = \neg\mathbf{R}$ and $r_2 \in \{\neg\mathbf{L}, \neg\circ\mathbf{L}\}$:

1. $\varphi = \neg\alpha$, $r_1 = \neg\mathbf{R}$ and $r_2 = \neg\mathbf{L}$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\varpi_1'\\ \Gamma_1, \alpha \longmapsto \Delta_1\end{array}}{\Gamma_1 \longmapsto \Delta_1, \neg\alpha}\,\neg\mathbf{R} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\varpi_2'\\ \Gamma_2', \circ\alpha \longmapsto \Delta_2, \alpha\end{array}}{\Gamma_2', \circ\alpha, \neg\alpha \longmapsto \Delta_2}\,\neg\mathbf{L}}{\Gamma_1, \Gamma_2', \circ\alpha \longmapsto \Delta_1, \Delta_2}\,\mathbf{Cut}$$

Then, ϖ is the following:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\ \varpi_2'}{\Gamma_2', \circ\alpha \ \longmapsto\ \Delta_2, \alpha} \qquad \dfrac{\vdots\ \varpi_1'}{\Gamma_1, \alpha \ \longmapsto\ \Delta_1}}{\Gamma_1, \Gamma_2', \circ\alpha \ \longmapsto\ \Delta_1, \Delta_2}\ \textbf{Cut}$$

2. $\varphi = \neg\alpha$, $r_1 = \neg\mathbf{R}$ and $r_2 = \neg\circ\mathbf{L}$. Therefore $\alpha = \neg^{n+1}\circ\alpha'$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \varpi_1'}{\Gamma_1, \neg^{n}\circ\alpha' \ \longmapsto\ \Delta_1}}{\Gamma_1 \ \longmapsto\ \Delta_1, \neg^{n+1}\circ\alpha'}\ \neg\mathbf{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \varpi_2'}{\Gamma_2 \ \longmapsto\ \Delta_2, \neg^{n}\circ\alpha'}}{\Gamma_2, \neg^{n+1}\circ\alpha' \ \longmapsto\ \Delta_2}\ \neg\circ\mathbf{L}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \ \longmapsto\ \Delta_1, \Delta_2}\ \textbf{Cut}$$

Then, ϖ is the following:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\ \varpi_2'}{\Gamma_2 \ \longmapsto\ \Delta_2, \neg^{n}\circ\alpha'} \qquad \dfrac{\vdots\ \varpi_1'}{\Gamma_1, \neg^{n}\circ\alpha' \ \longmapsto\ \Delta_1}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \ \longmapsto\ \Delta_1, \Delta_2}\ \textbf{Cut}$$

□

Lemma 66. *Let $\mathscr{S} \in \{\mathbf{MBC}, \mathbf{MCI}\}$, the derivations ϖ, ϖ', ϖ_1' and ϖ_{Ax}' be sequent derivations in $\mathscr{S}$ with cut-complexities lower than $l(\circ\gamma)$ for the sequent $\Gamma \ \longmapsto\ \Delta$, the sequent $\Gamma', \circ\gamma, \neg\gamma \ \longmapsto\ \Delta'$, the sequent $\Gamma, \Gamma' - \circ\gamma \ \longmapsto\ \Delta - \circ\gamma, \Delta', \gamma$ and the sequent $\circ\gamma, \Gamma' - \circ\gamma, \neg\gamma \ \longmapsto\ \Delta'$ respectively. Moreover suppose the last rule of ϖ' is an application of $\neg\boldsymbol{L}$ introducing the designated occurrence of $\neg\gamma$ on the left. These derivations can be depicted as follows:*

$$\dfrac{\vdots\ \pi}{\Gamma \ \longmapsto\ \Delta} \qquad \left.\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_1'}{\Gamma', \circ\gamma \ \longmapsto\ \Delta', \gamma}}{\Gamma', \circ\gamma, \neg\gamma \ \longmapsto\ \Delta'}\ \neg\boldsymbol{L}\right\}\pi'$$

$$\dfrac{\vdots\ \varpi_1'}{\Gamma, \Gamma' - \circ\gamma \ \longmapsto\ \Delta - \circ\gamma, \Delta', \gamma} \qquad \dfrac{\vdots\ \varpi_{Ax}'}{\circ\gamma, \Gamma' - \circ\gamma, \neg\gamma \ \longmapsto\ \Delta'}$$

Thus a derivation ϖ in $\mathscr{S}$ can be obtained for $\Gamma, \Gamma' - \circ\gamma, \neg\gamma \ \longmapsto\ \Delta - \circ\gamma, \Delta'$ *with cut-complexity lower than* $l(\circ\gamma)$.

Proof. If $\circ\gamma \in \Gamma$, the derivation ϖ can be obtained applying $\neg$**L** to ϖ'_1, resulting in a derivation with the same cut-complexity of ϖ'_1. If $\circ\gamma \notin \Delta$, then $\Delta - \circ\gamma = \Delta$ and the derivation ϖ can be obtained by weakenings on π. In these two cases the derivation constructed has cut-complexity lower than $l(\circ\gamma)$, by the hypothesis on ϖ'_1 or π. For the remaining of the proof it can be assumed that $\circ\gamma \notin \Gamma$ and $\circ\gamma \in \Delta$.

Suppose now that there is no occurrence of $\circ\gamma$ in Δ introduced by **Ax**. In the case in which $\mathscr{S}$ = **MBC**, all occurrences of $\circ\gamma$ in Δ are introduced only by **Wk-R**, as there is no rule introducing the consistency connective $\circ$ to the right in **MBC**. By Lemma 59, it can be found a derivation for the sequent $\Gamma \ \longmapsto\ \Delta - \circ\gamma$ with the same cut-complexity of π and the required sequent can be obtained from it only by weakenings. In the case in which $\mathscr{S}$ = **MCI**, by repeatedly using Lemma 64 and some **Ct-L**, a derivation $\hat{\pi}$ with the same cut-complexity of π can be constructed such that:

$$\begin{array}{c} \vdots\, \hat{\pi} \\ \Gamma, \gamma, \neg\gamma \ \longmapsto\ \Delta - \circ\gamma \end{array}$$

It follows that a derivation for the required sequent can be constructed applying a **Cut** on the conclusions of ϖ'_1 and $\hat{\pi}$, consuming the designated occurrence of γ on the left of $\hat{\pi}$ and on the right of ϖ'_1, followed by some contractions:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, \varpi'_1 \\ \Gamma, \Gamma' - \circ\gamma \ \longmapsto\ \Delta - \circ\gamma, \Delta', \gamma \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\, \hat{\pi} \\ \Gamma, \gamma, \neg\gamma \ \longmapsto\ \Delta - \circ\gamma \end{array}}{\Gamma, \Gamma' - \circ\gamma, \Gamma, \neg\gamma \ \longmapsto\ \Delta - \circ\gamma, \Delta', \Delta - \circ\gamma}\ \textbf{Cut}}{\Gamma, \Gamma' - \circ\gamma, \neg\gamma \ \longmapsto\ \Delta - \circ\gamma, \Delta'}\ (\textbf{Ct-L}, \textbf{Ct-R})^*$$

Observe that the cut-complexity of the above derivation is the maximum of $l(\gamma)$, the cut-complexity of $\hat{\pi}$ and the cut-complexity of ϖ'_1, and so lower than $l(\circ\gamma)$. For the remaining of the proof it can then be assumed that there is at least an application of **Ax** in π introducing some occurrence of $\circ\gamma$ in Δ.

By Corollary 62 on π and ϖ'_{Ax}, it can be found a derivation $\widehat{\varpi'_{Ax}}$ for the sequent $\Gamma, \Gamma' - \circ\gamma, \neg\gamma \longmapsto \widehat{\Delta}, \Delta'$ in which $\widehat{\Delta} \subseteq \Delta$ stands for the multiset obtained by the removal of all those occurrences of $\circ\gamma$ in Δ introduced exclusively by **Ax** in ϖ'_{Ax}. All the remaining occurrences of $\circ\gamma$ in $\widehat{\Delta}$ (if any) are not introduced by **Ax** in $\widehat{\varpi'_{Ax}}$ and the cut-complexity of the derivation obtained in this way is the maximum of the cut-complexities of π and ϖ'_{Ax}. If there are no remaining occurrences of $\circ\gamma$ in $\widehat{\Delta}$, then $\widehat{\Delta} = \Delta - \circ\gamma$ and to complete the proof it suffices to take $\varpi = \widehat{\varpi'_{Ax}}$. Therefore it can be assumed that there is at least one occurrence of $\circ\gamma$ in $\widehat{\Delta}$. In the case in which $\mathscr{S}$ = **MBC**, as in **MBC** there is no rule introducing the consistency connective $\circ$ to the right, all remaining occurrences of $\circ\gamma$ in $\widehat{\Delta}$ are introduced only by **Wk-R** and, by Lemma 59, it is possible to construct a derivation for the required sequent. It can then be assumed that $\mathscr{S}$ = **MCI** and that there are some occurrences of $\circ\gamma$ in $\widehat{\Delta}$ but none of them introduced by **Ax** in $\widehat{\varpi'_{Ax}}$.

By repeatedly applying Lemma 64 and some **Ct-L**, there is a derivation with the same cut-complexity of $\widehat{\varpi'_{Ax}}$ for the sequent: $\Gamma, \Gamma' - \circ\gamma, \gamma, \neg\gamma \longmapsto \Delta - \circ\gamma, \Delta'$. By the application of a **Cut**, with cutting formula γ, on this derivation and on ϖ'_1 followed by some contractions, one can construct the following derivation for the required sequent:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, \varpi'_1 \\ \Gamma, \Gamma' - \circ\gamma \longmapsto \Delta - \circ\gamma, \Delta', \gamma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Gamma, \Gamma' - \circ\gamma, \gamma, \neg\gamma \longmapsto \Delta - \circ\gamma, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' - \circ\gamma, \Gamma, \Gamma' - \circ\gamma, \neg\gamma \longmapsto \Delta - \circ\gamma, \Delta', \Delta - \circ\gamma, \Delta'}\ \textbf{Cut}}{\Gamma, \Gamma' - \circ\gamma, \neg\gamma \longmapsto \Delta - \circ\gamma, \Delta'}\ (\textbf{Ct-L}, \textbf{Ct-R})^*$$

in which $(\textbf{Ct-L}, \textbf{Ct-R})^*$ stands for a number of applications of **Ct-L** and **Ct-R**. Observe that the above derivation has as cut-complexity the maximum of the cut-complexities of ϖ'_1, $\widehat{\varpi'_{Ax}}$ and of $l(\gamma)$, which is still lower than $l(\varphi)$. □

Lemma 67. *Let* $\mathscr{S} \in$ {**MBC**,**MCI**} *and* $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^\perp}$. *Let* π *and* π' *be sequent derivations in* $\mathscr{S}$ *for the sequents* $\Gamma \longmapsto \Delta$ *and* $\Gamma' \longmapsto \Delta'$*, respectively, whose cut complexities are lower than* $l(\varphi)$. *Therefore, there exists a sequent derivation* ϖ *in* $\mathscr{S}$ *of the sequent* $\Gamma, \Gamma' - \varphi \longmapsto \Delta - \varphi, \Delta'$*, whose cut complexity is lower then* $l(\varphi)$.

Proof. The proof goes by induction on $h(\pi) + h(\pi')$. The induction basis, for which $h(\pi) + h(\pi') = 2$, is established by itens 1a, 1b and 1c below. Suppose now that $h(\pi) + h(\pi') > 2$ and that, for all derivations ρ and ρ' of $\mathscr{S}$ for which $h(\rho) + h(\rho') < h(\pi) + h(\pi')$, deriving the sequents $\Gamma_\rho \longmapsto \Delta_\rho$ and $\Gamma_{\rho'} \longmapsto \Delta_{\rho'}$ respectively, there exists for all $\psi \in \mathcal{L}_{\Sigma^\perp}$ a sequent derivation in $\mathscr{S}$ for the sequent $\Gamma_\rho, \Gamma_{\rho'} - \psi \longmapsto \Delta_\rho - \psi, \Delta_{\rho'}$ whose cut-complexity is lower than $l(\psi)$. Let r denote the last rule of π and r' the last rule of π'.

1. Suppose $r \in \{\mathbf{Ax}, \perp\mathbf{L}\}$ or $r' \in \{\mathbf{Ax}, \perp\mathbf{L}\}$.

    (a) If $r = \perp\mathbf{L}$, then $\Gamma = \{\perp\}$ and $\Delta = \{\}$. In such a case, the sequent to prove: $\perp, \Gamma' - \varphi \longmapsto \Delta'$ can be obtained from π by repeatedly weakening.

    (b) If $r' = \perp\mathbf{L}$, then $\Gamma' = \{\perp\}$ and $\Delta' = \{\}$. In the case that $\varphi \neq \perp$, the sequent to prove: $\Gamma, \perp \longmapsto \Delta - \varphi$ can be obtained from π' by weakenings. If $\varphi = \perp$, the sequent to prove: $\Gamma \longmapsto \Delta - \perp$ can be obtained from π by Lemma 60.

    (c) If $r = \mathbf{Ax}$ or $r' = \mathbf{Ax}$, the proof presents no difficulty and is left to the reader.

    For the remaining of the proof, it can then be assumed that r and r' are both different from $\mathbf{Ax}$ and $\perp\mathbf{L}$.

2. Suppose r is a rule that does not produce an occurrence of φ to the right.

    (a) In the case in which r has just one sequent in its antecedent, π and π' are as follows:

$$\left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma, \Theta_1 \longmapsto \Delta, \Theta_2\end{array}}{\Gamma, \Pi_1 \longmapsto \Delta, \Pi_2}\,r\right\}\pi \qquad\qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'\\ \Gamma' \longmapsto \Delta'\end{array}$$

    in which the formulas consumed by r are present in the multisets Θ_1 and Θ_2 and the formula produced, in Π_1 or Π_2. By induction hypothesis, as $h(\pi_1) + h(\pi') < h(\pi) + h(\pi')$, the application of the lemma to π_1 and π' results in a sequent derivation

ϖ_1 for the sequent $\Gamma, \Theta_1, \Gamma' - \varphi \longmapsto \Delta - \varphi, \Theta_2 - \varphi, \Delta'$ with cut-complexity lower than $l(\varphi)$. The following derivation can now be constructed:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \varpi_1\\ \Gamma, \Theta_1, \Gamma' - \varphi \longmapsto \Delta - \varphi, \Theta_2 - \varphi, \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Theta_1, \Gamma' - \varphi \longmapsto \Delta - \varphi, \Theta_2, \Delta'}\,(\textbf{Wk-R})^*}{\Gamma, \Pi_1, \Gamma' - \varphi \longmapsto \Delta - \varphi, \Pi_2, \Delta'}\,r$$

in which $(\textbf{Wk-R})^*$ stands for zero or more applications of **Wk-R**, whether $\varphi \in \Theta_2$ or not. The above application of r is always possible for, if $r \neq \neg\textbf{L}$, it needs only to consume the formulas in the sets Θ_1 and Θ_2 to produce the one in Π_1 or Π_2, in the same way it is done in π. In the case in which $r = \neg\textbf{L}$, it can be applied for its constraint formula occurs in Γ, as it can be observed from the fact that r is also applied as the last rule of π, and in such a derivation the constraint formula can only occur in Γ. Observe now that the concluding sequent of the above derivation is exactly the one required, for $(\Delta, \Pi_2) - \varphi = \Delta - \varphi, \Pi_2$, as $\varphi \notin \Pi_2$, for it is presupposed r not to introduce φ to the right. Also observe that the above derivation has the same cut-complexity of ϖ_1, and so this is lower than $l(\varphi)$.

(b) If r has two sequents in its antecedent then $r \in \{\rightarrow\textbf{E}, \textbf{Cut}\}$ and does not produce φ to the right. The derivations π and π' are as follows:

$$\left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \Gamma \longmapsto \Delta, \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ \Gamma, \beta \longmapsto \Delta\end{array}}{\Gamma, \Pi \longmapsto \Delta}\,r\right\}\pi \qquad\qquad \begin{array}{c}\vdots\ \pi'\\ \Gamma' \longmapsto \Delta'\end{array}$$

in which, in the case that $r = \textbf{Cut}$, the multi-set Π is empty and the occurrences α and β are from the same formula: the cutting formula. In the case that $r = \rightarrow\textbf{E}$, the multi-set Π collects the occurrence produced by r, that is, $\Pi = \{\alpha \rightarrow \beta\}$. By induction hypothesis, there is a derivation ϖ_1 for the sequent

$\Gamma, \Gamma' - \varphi \;\longmapsto\; (\Delta, \alpha) - \varphi, \Delta'$ and a derivation ϖ_2 for $\Gamma, \beta, \Gamma' - \varphi \;\longmapsto\; \Delta - \varphi, \Delta'$, both of them with cut-complexity lower than $l(\varphi)$. The following derivation can then be constructed:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \varpi_1}{\Gamma, \Gamma' - \varphi \;\longmapsto\; (\Delta, \alpha) - \varphi, \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' - \varphi \;\longmapsto\; \Delta - \varphi, \alpha, \Delta'}\,(\textbf{Wk-R})^{?} \qquad \dfrac{\vdots\ \varpi_2}{\Gamma, \beta, \Gamma' - \varphi \;\longmapsto\; \Delta - \varphi, \Delta'}}{\dfrac{\Gamma, \Gamma' - \varphi, \Gamma, \Gamma' - \varphi, \Pi \;\longmapsto\; \Delta - \varphi, \Delta', \Delta - \varphi, \Delta'}{\Gamma, \Pi, \Gamma' - \varphi \;\longmapsto\; \Delta - \varphi, \Delta'}\,(\textbf{Ct-L}, \textbf{Ct-R})*}\, r
$$

in which $(\textbf{Wk-R})^{?}$ stands for zero or one application of **Wk-R** introducing α, depending whether $\alpha = \varphi$ or not. Observe that, if $r = \to\!\textbf{E}$, the cut-complexity of the above definition is the maximum of the cut-complexities of ϖ_1 and ϖ_2, which are both lower than $l(\varphi)$. If $r = \textbf{Cut}$, the cut-complexity of the above definition is the maximum of the cut-complexity of ϖ_1, the cut-complexity of ϖ_2 and the complexity of the application of this **Cut**. The cut-complexities of ϖ_1 and ϖ_2 are lower than $l(\varphi)$, by the inductive hypothesis, and the cut complexity of this **Cut** is also lower than $l(\varphi)$, for, by the hypothesis, the cut-complexity of π is lower than $l(\varphi)$.

3. Suppose r' is a rule that does not produce φ to the left.

   (a) Suppose r' is a logical rule different from $\to$**E** and $\neg$**L** that does not introduce φ to the left, or r' is a structural rule different from **Cut** that does not produce φ to the left. Thus π and π' are as follows:

$$
\dfrac{\vdots\ \pi}{\Gamma \;\longmapsto\; \Delta} \qquad\qquad \left.\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi'_1}{\Gamma', \Theta_1 \;\longmapsto\; \Delta', \Theta_2}}{\Gamma', \Pi_1 \;\longmapsto\; \Delta', \Pi_2}\, r'\right\}\pi'
$$

   in which the formulas consumed by r' are present in the multisets Θ_1 and Θ_2, and the formula produced by it in Π_1 or Π_2. By induction hypothesis, as $h(\pi) + h(\pi'_1) < h(\pi) + h(\pi')$, the application of the lemma to π and π'_1 gives a sequent derivation ϖ'_1 for $\Gamma, \Gamma' - \varphi, \Theta_1 - \varphi \;\longmapsto\; \Delta - \varphi, \Delta', \Theta_2$ with cut-complexity lower than $l(\varphi)$. The following derivation can now be constructed:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \varpi'_1\\ \Gamma, \Gamma' - \varphi, \Theta_1 - \varphi \;\longmapsto\; \Delta - \varphi, \Delta', \Theta_2\end{array}}{\Gamma, \Gamma' - \varphi, \Theta_1 \;\longmapsto\; \Delta - \varphi, \Delta', \Theta_2}\,(\mathbf{Wk\text{-}L})^*}{\Gamma, \Gamma' - \varphi, \Pi_1 \;\longmapsto\; \Delta - \varphi, \Delta', \Pi_2}\,r'$$

in which $(\mathbf{Wk\text{-}L})^*$ stands for zero or more applications of **Wk-L** depending whether $\varphi \in \Theta_1$ or not. The above application of r' is always possible for, as $r' \neq \neg\mathbf{L}$, it needs only to consume the formulas in the sets Θ_1 and Θ_2 to produce the one in Π_1 or Π_2. Observe now that the concluding sequent of the above derivation is exactly the one required, for $(\Gamma', \Pi_1) - \varphi = \Gamma' - \varphi, \Pi_1$, as $\varphi \notin \Pi_1$, for it is presupposed r' not to produce it to the left. Also observe that it has the same cut-complexity of ϖ'_1, which is lower than $l(\varphi)$.

(b) Suppose r' is $\neg\mathbf{L}$ applied to an occurrence of a formula γ that does not introduce φ to the left. If $\varphi \neq \circ\gamma$, the proof goes as in the previous item: just observe, following the above construction, that in such a case $\circ\gamma \in \Gamma' - \varphi$. Thus it remains to address the case in which $\varphi = \circ\gamma$ and the derivations π and π' are as follows:

$$\begin{array}{c}\vdots\ \pi\\ \Gamma \;\longmapsto\; \Delta\end{array} \qquad\qquad \left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi'_1\\ \Gamma', \circ\gamma \;\longmapsto\; \Delta', \gamma\end{array}}{\Gamma', \circ\gamma, \neg\gamma \;\longmapsto\; \Delta'}\,\neg\mathbf{L}\right\}\pi'$$

The induction hypothesis on π and π'_1 gives a derivation ϖ'_1 with cut-complexity lower than $l(\circ\gamma)$ such that:

$$\begin{array}{c}\vdots\ \varpi'_1\\ \Gamma, \Gamma' - \circ\gamma \;\longmapsto\; \Delta - \circ\gamma, \Delta', \gamma\end{array}$$

By induction hypothesis on the one step derivation:

$$\dfrac{}{\circ\gamma \ \longmapsto\ \circ\gamma}\ \mathbf{Ax}$$

and π' there is a sequent derivation ϖ'_{Ax} with cut-complexity lower than $l(\varphi)$ such that:

$$\begin{array}{c} \vdots\ \varpi'_{Ax} \\ \circ\gamma, \Gamma' - \circ\gamma, \neg\gamma \ \longmapsto\ \Delta' \end{array}$$

The result then follows from Lemma 66.

(c) Suppose that $r' = \to\mathbf{E}$ and does not introduce φ to the left, or that $r' = \mathbf{Cut}$. The proof is similar to one of item 2b and is left for the reader to check.

It can now be assumed that r produces an occurrence of φ to the right and r' produces an occurrence of φ to the left.

4. If $r \in \{\mathbf{Wk\text{-}R}, \mathbf{Ct\text{-}R}\}$ and produces an occurrence of φ, the result is obtained by the induction hypothesis on the sub-derivation for the antecedent of r and π'.

5. If $r' \in \{\mathbf{Wk\text{-}L}, \mathbf{Ct\text{-}L}\}$ and produces an occurrence of φ, the result is obtained by the induction hypothesis on π and the sub-derivation for the antecedent of r'.

   It can now be assumed that r is a logical rule introducing φ to the right and that r' is a logical rule introducing φ to the left.

6. Suppose r is a logical rule that introduces φ to the right and r' is a logical rule that introduces φ to the left. Let I be the number of sequents in the antecedent of π and J, the number of sequentes in the antecedent of r'. For $i \in \{1, \dots, I\}$ and $j \in \{1, \dots, J\}$, π_i and π'_j are, respectively, the sequent derivations of the sequents $\Gamma_i \ \longmapsto\ \Delta_i$ and $\Gamma'_j \ \longmapsto\ \Delta'_j$ in the antecedents of r and r'. For $i \in \{1, \dots, I\}$, by the induction hypothesis on π_i and π', one obtains the derivation(s) ϖ_i for the sequent(s) $\Gamma_i, \Gamma' - \varphi \ \longmapsto\ \Delta_i - \varphi, \Delta'$. For $j \in \{1, \dots, J\}$, by the induction hypothesis on π and π'_j, one obtains the derivation(s)

ϖ'_j for the sequent(s) $\Gamma, \Gamma'_j - \varphi \;\longmapsto\; \Delta - \varphi, \Delta'_j$. Now, the rule r can be applied at the end of the derivation(s) ϖ_i yelding the sequent $\Gamma, \Gamma' - \varphi \;\longmapsto\; \Delta - \varphi, \Delta', \varphi$ and r' at the end of the derivation(s) ϖ'_j yelding the sequent $\Gamma, \Gamma' - \varphi, \varphi \;\longmapsto\; \Delta - \varphi, \Delta'$. This can be done because the occurrences consumed by r are present in the multi-sets Γ_i and $\Delta_i - \varphi$, and the occurrences consumed by r', in the multi-sets $\Gamma'_j - \varphi$ and Δ'_j: just observe that the formulas consumed by these rules are different from φ, and so must also occur in $\Delta_i - \varphi$, for r, and in $\Gamma'_j - \varphi$, for r'. Also in the case in which $r' = \neg\mathbf{L}$ producing a formula $\varphi = \neg\gamma$, then $\varphi \neq \circ\gamma$, and so $\circ\gamma \in \Gamma'_1 - \varphi$. It is possible then to construct the following derivation:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\begin{matrix} \vdots\, \varpi_1 & & \vdots\, \varpi_I \\ \Gamma_1, \Gamma' - \varphi \longmapsto \Delta_1 - \varphi, \Delta' & \cdots & \Gamma_I, \Gamma' - \varphi \longmapsto \Delta_I - \varphi, \Delta' \end{matrix}
}{
\Gamma, \Gamma' - \varphi \longmapsto \Delta - \varphi, \Delta', \varphi
}\, r
\qquad
\dfrac{
\begin{matrix} \vdots\, \varpi'_1 & & \vdots\, \varpi'_J \\ \Gamma, \Gamma'_1 - \varphi \longmapsto \Delta - \varphi, \Delta'_1 & \cdots & \Gamma, \Gamma'_J - \varphi \longmapsto \Delta - \varphi, \Delta'_J \end{matrix}
}{
\Gamma, \Gamma' - \varphi, \varphi \longmapsto \Delta - \varphi, \Delta'
}\, r'
}{
\dfrac{\Gamma, \Gamma' - \varphi, \Gamma, \Gamma' - \varphi \longmapsto \Delta - \varphi, \Delta', \Delta - \varphi, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' - \varphi \longmapsto \Delta - \varphi, \Delta'}\, (\mathbf{Ct\text{-}L}, \mathbf{Ct\text{-}R})^*
}\, \mathbf{Cut}
$$

In the above derivation there is a **Cut** on φ, and the sub-derivations of this cut have cut-complexities lower than $l(\varphi)$. Observe that the sub-derivation ending in this **Cut** fits the hypothesis of Lemma 65, and thus there exists one derivation for the same sequent with lower cut-complexity. To obtain the required derivation, it suffices to replace this derivation obtained from Lemma 65 for the one ending in the **Cut** on φ above.

□

Lemma 68. *If there is a derivation π for $\Gamma \;\longmapsto\; \Delta$ in $\mathscr{S} \in \{\mathbf{MBC}, \mathbf{MCI}\}$ with cut-complexity greater than* 0*, then one can found a proof π' in $\mathscr{S}$ for the same sequent $\Gamma \;\longmapsto\; \Delta$ with a lower cut-complexity.*

Proof. The proof goes by induction on $h(\pi)$. If $h(\pi) = 1$ then it has cut-complexity 0 and the results holds trivially. Suppose now $h(\pi) > 1$ and that the result holds good for all derivations π' for which $l(\pi') < l(\pi)$. Let the following be a sub-derivation of π ending in a cut with maximum complexity:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \longmapsto \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma', \varphi \longmapsto \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \longmapsto \Delta, \Delta'}\ \textbf{Cut}$$

If some of the π_i has the same cut complexity of the above derivation, let ϖ_i be the derivation obtained from it with lower cut complexity by the induction hypothesis (or let simply $\varpi_i = \pi_i$ otherwise). Then, by the application of Lemma 67 on ϖ_1 and ϖ_2, it is possible to construct the following sequent derivation:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, (\Gamma', \varphi) - \varphi \longmapsto (\Delta, \varphi) - \varphi, \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \longmapsto \Delta, \Delta'}\ (\textbf{Wk-L}, \textbf{Wk-R})*$$

with cut-complexity lower than $l(\varphi)$. Now, replace in π the sub-derivation with greater cut-complexity for the above, with lower cut-complexity. To finish, repeat the process for all sub-derivations ending in a cut of complexity $l(\varphi)$. □

Theorem 69 (Cut Elimination)**.** *All sequents derived in* **MBC** *and* **MCI** *(Definitions 49 and 50) can be derived without the use of the* ***Cut*** *rule.*

Proof. For a given sequent derived in one of these calculi, repeatedly apply Lemma 68 on a derivation for it until obtain a proof with cut-complexity 0. □

6. Applications to mbC and mCi

In this section some new results will be established for the logics **mbC** and **mCi**. Taking profit of the results obtained in the previous sections, the results will be firstly proved for the version of these logics over signature $\Sigma^{\perp}$, namely $\mathbf{mbC}^{\perp}$ and $\mathbf{mCi}^{\perp}$. However, due to Theorem 37, these results are also valid for the original formulation of these logics, namely $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$ and $\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}$, respectively.

6.1. mbC is not controllably explosive

Contradiction, with respect to a given negation connective $\neg$, is simply the presence of both a formula φ and its negation $\neg\varphi$ at the same circumstances. From a classical standpoint, the presence of contradictions is inseparable of *triviality* (the fact that all formulas are entailed). Paraconsistency is the study of contradictory yet non-trivial theories. There are levels in which some logic can cope with the compromise between contradictoriness and triviality. The explosive approach, that of classical logic for instance, says that from any contradiction all formulas can be entailed. On the other pole, there are logics not finitely trivializable, that is, for which there is no finite set of formulas entailing all possible formulas. Somewhere between these oposite poles, there are logics for which contradictions involving certain kinds of formula schemes indeed trivialize. To make this point clear, from (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007) it can be taken the following definition:

Definition 70 (Controllable Explosiveness)**.** A standard logic $\mathscr{L}$ over the language $\mathcal{L}$ is said to be *controllably explosive in contact with* some formula $\varphi(p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{L}$ if the following hold:

(i) $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \nvdash_{\mathscr{L}} \psi$ for some choice of $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ and some ψ, i.e., φ is not a bottom formula schema;

(ii) $\neg\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \nvdash_{\mathscr{L}} \psi$ for some choice of $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ and some ψ, i.e., $\neg\varphi$ is not a bottom formula schema;

(iii) $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \neg\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \vdash_{\mathscr{L}} \psi$ for every $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ and ψ.

Definition 71 (Controllably Explosive Logic)**.** A logic $\mathscr{L}$ is said to be *controllably explosive* if there is some formula φ that $\mathscr{L}$ is controllably explosive in contact with φ.

Examples 72.
1. Clearly, a logic is explosive iff it is controllably explosive in contact with $\varphi(p_1) \stackrel{def}{=} p_1$.

2. Da Costa's logic C_1 — see (Costa 1963) — defined over the signature $\Sigma^{\wedge,\vee}$ without the consistency operator $\circ$, is an **LFI** *in which consistency can be defined in terms of the other connectives as follows:* $\alpha^{\circ} \stackrel{def}{=} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$.

Being so, it is paraconsistent, but it is controllably explosive in contact with $\varphi(p_1) \stackrel{def}{=} (p_1 \wedge \neg p_1)$ *as, for every* α *and* ψ,

$$(\alpha \wedge \neg\alpha), \neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \vdash_{C_1} \psi\,.$$

The version of C_1 *in the full signature* $\Sigma^{\wedge,\vee}$ *is called* **Cila**, *and it is an extension of* **mCi** *— see (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007).*

3. By its turn, **mCi** *(and every extension of it, including* **Cila***) is controllably explosive in contact with* $\varphi(p_1) \stackrel{def}{=} \circ p_1$.

In fact, the following theorem can be established for all non-trivial extensions of **mCi**, relating derivability of consistent formulas with controllable explosiveness.

Theorem 73. *Let* $\mathscr{L}$ *be a non-trivial extension of* **mCi** *such that the implication (occurring in the axioms of* **mCi***) satisfies MTD. Then* $\mathscr{L}$ *is controllably explosive in contact with* φ *if, and only if, the formula* $\circ\varphi$ *is a theorem of* $\mathscr{L}$.

Proof. See (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007, Theorem 79). □

Regarding now **mbC**, as observed in (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007, p.84), in this logic there are no theorems of the form $\circ\varphi$. So the following question was posed in (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007): is **mbC** a controllably explosive logic? As it will be seen in Theorem 79, the answer is *no*: in **mbC**, any formula $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ satisfying Item (iii) of Definition 70 must be a bottom formula schema, that is, it violates Item (i) of Definition 70.

The proof of Theorem 79 requires some technical results concerning the sequent calculus **MBC**.

Lemma 74. *In a derivation of the sequent calculi defined in the previous section, the only way for a formula* φ *occurring in a sequent of this derivation not to occur at the concluding sequent, or as a sub-formula of an occurrence in the conclusion, is if there is some applications of* **Cut** *consuming occurrences of* φ.

Proof. Just observe that, in such sequent calculi, **Cut** is the only rule which does not produce a formula occurrence in which the consumed occurrence stands as a sub-formula. □

Lemma 75. *For the sequent calculi defined in the previous section, if some formula occurs on one side of a sequent of a derivation, then it must occur as a proper sub-formula in all of its descendants occurring on a different side.*

Proof. Just observe that in order for any formula occurrence to have descendants on a different side than its own, some descendant of it must have to be consumed by an application of a logical rule. All logical rules only produce an occurrence in which the consumed one occurs as a proper sub-formula. □

Lemma 76. *Let $\mathscr{L}$ be* **MBC** *or* **MCI** *and π be a derivation in $\mathscr{L}$ for the sequent $\Gamma \longmapsto \Delta$, and let φ be a formula occurring in Γ, introduced only by* ***Wk-L*** *and such that $\varphi \neq \circ\gamma$ for all $\gamma \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\perp}}$. Then, it can be constructed a proof in $\mathscr{L}$ for the sequent $\Gamma - \varphi \longmapsto \Delta$ with the same cut-complexity of π and in which all formula occurrences in the concluding sequent are introduced by the same rules introducing the corresponding occurrences in the concluding sequent of π.*

Proof. The proof is similar to the one of Lemma 59. Just observe that, in order to remove the necessary occurrences of φ in π, such a removal must not break any rule, and so φ must be different from $\circ\gamma$ for any γ; removing a formula of type $\circ\gamma$ could break an application of $\neg$**L**. □

Theorem 77. *If there is a sequent derivation in* **MBC** *for the sequent $\sigma, \neg\sigma \longmapsto \perp$, then there is also a derivation for the sequent $\sigma \longmapsto \perp$.*

Proof. From Theorem 69, there is a a cut-free derivation in **MBC** for $\sigma, \neg\sigma \longmapsto \perp$. Now, observe that the only logical rule of **MBC** which introduces a negation to the left is $\neg$**L** and, by applying this rule on σ, the formula $\circ\sigma$ would have to occur in some sequent of the cut-free derivation. But such a thing is impossible by Lemma 74, for $\circ\sigma$ would also have to occur as a sub-formula of a formula occurring in $\sigma, \neg\sigma \longmapsto \perp$. The occurrence of $\neg\sigma$ also could not have been introduced by **Ax**, as this would imply, by Lemma 74, in an occurrence of $\neg\sigma$ as a sub-formula occurring on the right of the concluding sequent, or in an occurrence as a proper sub-formula of some formula occurring on the left. Thus $\neg\sigma$ is introduced in the cut-free derivation only by **Wk-L** and, by Lemma 76, there is a proof in **MBC** for $\sigma \longmapsto \bot$. □

Corollary 78. *If there is a formula σ such that, for all formulas φ:*

$$\sigma, \neg\sigma \vdash_{\mathbf{mbC}} \varphi$$

then, also for all formulas φ it must be that:

$$\sigma \vdash_{\mathbf{mbC}} \varphi$$

Proof. For $\mathbf{mbC}^{\bot}$, the proof is a direct consequence of Theorem 77 and Theorem 56. Only in this case the proof will be set for $\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}$. Suppose that, for some $\sigma \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$ and for all $\varphi \in \mathcal{L}_{\Sigma^{\wedge,\vee}}$:

$$\sigma, \neg\sigma \vdash_{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}} \varphi$$

Taking $\varphi = \circ\sigma$, by Theorem 37 and Definition 30:

$$\sigma^*, \neg(\sigma^*) \vdash_{\mathbf{mbC}^{\bot}} \circ(\sigma^*)$$

Now, by Axiom $\mathbf{bc1}^{\bot}$ and some applications of **MP**:

$$\sigma^*, \neg(\sigma^*) \vdash_{\mathbf{mbC}^{\bot}} \bot$$

By Theorem 77 and Theorem 56:

$$\sigma^* \vdash_{\mathbf{mbC}^{\bot}} \bot$$

By Lemma 16, item 1, taking $\alpha = (\neg\sigma \wedge \circ\sigma)^*$, and some applications of **MP**:

$$\sigma^* \vdash_{\mathbf{mbC}^{\bot}} (\neg\sigma \wedge \circ\sigma)^*$$

By Theorem 37:

$$\sigma \vdash_{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}} (\neg\sigma \wedge \circ\sigma)$$

Finally, by Axiom **bc1** and some applications of **MP**:

$$\sigma \vdash_{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}} \varphi$$

□

Theorem 79. *The logic* **mbC** *is not controllably explosive.*

Proof. Suppose there is a formula $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ satisfying, in **mbC**, the property (iii) from Definition 70. Then it follows from Corollary 78 that $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ must be a bottom formula in **mbC** for all choices of $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, violating clause (i) from Definition 70. Therefore, for every formula $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$, **mbC** is not controllably explosive in contact with $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$. Thus, **mbC** is not a controllably explosive logic, according to Definition 71. □

6.2. On negated formulas as theorems of mbC and mCi

Now, an application of the results on the cut-elimination theorems established in Section 5 will be given regarding the derivation of negated formulas in **mbC** and **mCi**.

As it is well-known, the problem of provability can be reduced to that of unsatisfiability in classical logic:

Theorem 80. *Let* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *be any set of formulas of the language of* **CPL**. *Then:*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Gamma, \neg\varphi \textit{ is unsatisfiable} \qquad (\mathbf{Deriv} \hookrightarrow \mathbf{Unsat})$$

The above theorem states that an arbitrary instance of the problem of derivability for **CPL** can be settled by the solution of the unsatisfiability problem of a related instance concerning the classical negation. However, such an equivalence does not hold, in general, for paraconsistent logics, if we consider the paraconsistent negation instead of the classical one. Paraconsistent logics are most valuable for allowing one to understand how a given formula and its (paraconsistent) negation can be both satisfied at the same circumstances. Therefore, in the paraconsistent setting, there can be a formula φ which is a logical consequence of a set Γ of formulas and, nevertheless, the set $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ may have a paraconsistent model. In general, for logics satisfying *tertium non datur*, only one side of the above equivalence can be shown to hold. More precisely:

Theorem 81. *Let* $\mathscr{L}$ *be a logic over a language* $\mathcal{L}$ *with a negation* $\neg$. *If* $\mathscr{L}$ *is sound and complete for a semantics* $\mathbb{S} = \langle \mathfrak{M}, \vDash \rangle$ *such that, for all* $\varphi \in \mathcal{L}$, *and for all model $M \in \mathfrak{M}$, either M satisfies φ or M satisfies $\neg\varphi$. Then:*

$$\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \varphi \qquad \Longleftarrow \qquad \Gamma, \neg\varphi \textit{ is unsatisfiable in } \mathbb{S}$$

Proof. It is a direct consequence of the hypothesis and the definitions of completeness, semantical relation and unsatisfiability. □

Concerning the **LFI**s under investigation, it is a well known fact that the negation of any explosive formula in **mbC** or **mCi** is a theorem of this logic. More precisely:

Theorem 82. *Let $\mathscr{L} \in \{\mathbf{mbC}, \mathbf{mCi}\}$. Suppose that φ is a bottom formula, that is: for all formulas ψ, it is the case that $\varphi \vdash_{\mathscr{L}} \psi$. Then: $\vdash_{\mathscr{L}} \neg\varphi$.*

Proof. Observe that:

$$(\varphi \to \neg\varphi) \to \Big((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \big(((\varphi \to \bot) \to \neg\varphi) \to \neg\varphi\big)\Big)$$

is a theorem of $\mathscr{L}$, by Lemma 16, item 4. From the hypothesis, taking $\psi = \neg\varphi$, and by the deduction theorem, it follows that $\varphi \to \neg\varphi$ is also a theorem. Finally, observe that $(\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$ is an instance of Axiom $\sim\neg$. The result follows then from **MP**. □

In semantical terms:

Theorem 83. *Let $\mathscr{L}$ be* **mbC** *or* **mCi** *and V be respectively $V^{\mathbf{mbC}^{\bot}}$ or $V^{\mathbf{mCi}^{\bot}}$, if the logics are over the signature $\Sigma^{\bot}$, or let V be respectively $V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}$ or $V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$, if the logics are over the signature $\Sigma^{\wedge,\vee}$. Then, for every φ:*

$$\forall v \in V : v(\varphi) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall v \in V : v(\neg\varphi) = 1$$

Proof. It is an easy consequence of Theorem 82 and the soundness and completeness theorem of $\mathscr{L}$ with respect to bivaluations. A direct proof is also possible, from the basic clause for $\neg$ required for bivaluations. □

The converses of theorems 82 and 83, our second main result, are far from obvious. However, they are a consequence of Theorem 69:

Theorem 84. *Let* $\mathscr{L} \in \{\mathbf{mbC}, \mathbf{mCi}\}$. *If some negated formula* $\neg\varphi$ *is a theorem of* $\mathscr{L}$, *that is,* $\vdash_{\mathscr{L}} \neg\varphi$, *then* φ *is a bottom formula:* $\varphi \vdash_{\mathscr{L}} \psi$, *for all formulas* ψ.

Proof. Let $\mathscr{S}$ be **MBC** if $\mathscr{L}$ is **mbC**, and let $\mathscr{S}$ be **MCI** if $\mathscr{L}$ is **mCi**. For the logics in the signature $\Sigma^{\perp}$, suppose $\vdash_{\mathscr{L}} \neg\varphi$. From Theorem 56 and Theorem 69, it follows that there is a cut-free derivation for $\longmapsto \neg\varphi$ in $\mathscr{S}$. In such a derivation it is impossible that an application of **Ax** have been used, for it would imply, by Lemma 74, another occurrence of $\neg\varphi$ on the left of the concluding sequent or some occurrence of it as a proper subformula of $\neg\varphi$ to the right, by Lemma 75. From Lemma 63, it follows that the sequent $\varphi \longmapsto$ can be derived in $\mathscr{S}$ and the result follows now from Theorem 56. For the logics in the signature $\Sigma^{\wedge,\vee}$, the proof is similar to the one of Corollary 78. □

In semantical terms, we obtain the converse of Theorem 83:

Theorem 85. *Let* $\mathscr{L}$ *be* **mbC** *or* **mCi** *and* V *be respectively* $V^{\mathbf{mbC}^{\perp}}$ *or* $V^{\mathbf{mCi}^{\perp}}$, *if the logics are over the signature* $\Sigma^{\perp}$, *or let* V *be respectively* $V^{\mathbf{mbC}^{\wedge\vee}}$ *or* $V^{\mathbf{mCi}^{\wedge\vee}}$, *if the logics are over the signature* $\Sigma^{\wedge,\vee}$. *Then, for every* φ:

$$\forall v \in V : v(\neg\varphi) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall v \in V : v(\varphi) = 0$$

Proof. It is a direct consequence of the previous theorem and the soundness and completeness theorem of $\mathscr{L}$ with respect to bivaluations. □

Theorems 83 and 85 can be generalized to *any* semantics characterizing **mbC** or **mCi**, assuming that it does not admit trivial models:

Theorem 86. *Let* $\mathscr{L}$ *be* **mbC** *or* **mCi** *and let* $\mathbb{S} = \langle \mathfrak{M}, \vDash \rangle$ *be a semantics for* $\mathscr{L}$,[4] *which does not admit trivial models*[5]. *If* $\mathscr{L}$ *is sound and complete for* $\mathbb{S}$ *then, for every* φ:

$$M \text{ satisfies } \neg\varphi, \text{ for every } M \in \mathfrak{M} \qquad \Longleftrightarrow \qquad M \text{ does not satisfy } \varphi, \text{ for every } M \in \mathfrak{M}.$$

Proof. Suppose that M satisfies $\neg\varphi$ for every $M \in \mathfrak{M}$. Then $\vDash \neg\varphi$ and so $\vdash_{\mathscr{L}} \neg\varphi$, by completeness of $\mathscr{L}$ w.r.t. $\mathbb{S}$. By Theorem 84, $\varphi \vdash_{\mathscr{L}} \psi$ for all formulas ψ and, as $\mathbb{S}$ admits no trivial models and $\mathscr{L}$ is sound for it, φ is unsatisfiable in $\mathbb{S}$. That is, M does not satisfy φ for every $M \in \mathfrak{M}$.

Conversely, assume that, for every model $M \in \mathfrak{M}$, M does not satisfy φ. Then $\varphi \vDash \psi$, for every formula ψ. In particular, $\varphi \vDash \neg\varphi$ and so, by completeness of $\mathscr{L}$ w.r.t. $\mathbb{S}$, $\varphi \vdash_{\mathscr{L}} \neg\varphi$. From this, it is easy to prove — see, for instance, (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007) — that $\vdash_{\mathscr{L}} \neg\varphi$. Then, by soundness of $\mathscr{L}$ w.r.t. $\mathbb{S}$ it follows that M satisfies $\neg\varphi$ for every $M \in \mathfrak{M}$. □

Theorem 87. *Let $\mathscr{L}$ be* **mbC** *or* **mCi** *and let $\mathbb{S} = \langle \mathfrak{M}, \vDash \rangle$ be a semantics for $\mathscr{L}$ which does not admit trivial models, such that $\mathscr{L}$ is sound and complete for $\mathbb{S}$ (for instance, let $\mathbb{S}$ be the bivaluation semantics for $\mathscr{L}$). Then:*

$$\vdash_{\mathscr{L}} \neg\varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi \textit{ is unsatisfiable in } \mathbb{S}$$

Proof. The proof is a direct consequence of Theorem 86, and of the soundness and completeness theorem for $\mathscr{L}$ with respect to $\mathbb{S}$. □

It is worth noting that the last theorem cannot be extended to non-empty set of premises or to negated formulas. This is a consequence of the fact that φ and $\neg\neg\varphi$ are inequivalent in $\mathscr{L}$, for $\mathscr{L} \in \{\mathbf{mbC}, \mathbf{mCi}\}$:

Theorem 88. *There are examples of sets of formulas Γ and formulas φ such that $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \neg\varphi$ and, nevertheless, Γ, φ has models. That is:*

$$\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \neg\varphi \qquad \not\Longrightarrow \qquad \Gamma, \varphi \textit{ is unsatisfiable in } \mathbb{S}.$$

Proof. Let $\mathbb{S}$ be the bivaluation semantics for $\mathscr{L}$; let φ be any propositional variable and $\Gamma = \{\neg\varphi\}$. □

On the other hand:

Theorem 89. *There are examples of formulas φ such that $\vdash_{\mathscr{L}} \varphi$ and, nevertheless, $\neg\varphi$ has models. That is:*

$$\vdash_{\mathscr{L}} \varphi \qquad \not\Longrightarrow \qquad \neg\varphi \textit{ is unsatisfiable in } \mathbb{S}.$$

Proof. Let $\mathbb{S}$ be the bivaluation semantics for $\mathscr{L}$, and let φ be $(\psi \vee \neg\psi)$ with ψ a propositional variable. □

7. Concluding Remarks

In this paper we present a new formulation for the logics **mbC** and **mCi**, in a simpler signature which includes the bottom formula $\perp$ as a constant. The immediate effect of this move is that it allows to consider a single classical negation $\sim$, which simplifies the construction and analysis of the logics. Additionally, this allows to see in a clear way that these logics (as well as their extensions) are, in fact, extensions of classical logic by adding two non-truth-functional connectives: the paraconsistent negation $\neg$ and the consistency operator $\circ$. These systems (as well as da Costa's C-systems C_n) are not weaker than classical logic, as one could be naively tempted to believe: they are stronger than classical logic since they *extend* it by adding new conectives of an intensional character. This basic feature frequently remains hidden or ignored, given that the construction of the classical negation within these systems seems to be a secondary, rather unimportant fact. Starting from classical logic from the very beginning intends to clarify this relevant feature of these logics. The rigorous proof of the equivalence between both presentations of **mbC** (and also of **mCi**) is not as easy as one could imagine, because of the non-self-extensionality of the involved logics.

Another contribution of the paper is the presentation of adequate sequent calculi for **mbC** and **mCi** in the new proposed signature. The desired cut-elimination property, as well as other meta-properties of the calculi, are also established with full technical details. From this analysis of the meta-properties of these calculi it is possible to obtain two new and interesting results concerning both logics.

The first new result concerns exclusively **mbC**, and answers (negatively, as expected) an open question about it: is **mbC** a controllably explosive logic? The negative answer to this question means that for no schema φ it is the case that the contradiction $\{\varphi, \neg\varphi\}$ is explosive, and so **mbC** is paraconsistent in a very strong sense (or, from another perspective, the paraconsistent negation in **mbC** is considerably weak).

The second new result, which holds for both **mbC** and **mCi**, states that negated theorems must be unsatisfiable, in any semantics which does not admit trivial models. This is a somewhat surprising feature of these systems, specially in the case of **mbC**, in which the paraconsistent negation is extremely weak, as it was pointed out.

Acknowledgments

This research was financed by FAPESP (Brazil), Thematic Project LogCons 2010/51038-0. The first author was also supported by an individual research grant from The National Council for Scientific and Technological Development (CNPq), Brazil.

Bibliography

Avron, Arnon, Beata Konikowska, and Anna Zamansky (2013). Cut-free sequent calculi for C-systems with generalized finite-valued semantics. *Journal of Logic and Computation* **23**(3): 517–40. doi: 10.1093/logcom/exs039.

Carnielli, Walter, Marcelo E. Coniglio, and João Marcos (2007). Logics of Formal Inconsistency. In: *Handbook of Philosophical Logic* (2nd. edition). Ed. by D. Gabbay and F. Guenthner. Vol. 14. Springer, p.1–93.

Carnielli, Walter A. and João Marcos (2002). A taxonomy of C-systems. In: *Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent*. Proceedings of the 2nd World Congress on Paraconsistency (WCP 2000). Ed. by W. A. Carnielli, M. E. Coniglio, and I. M. L. D Ottaviano. Vol. 228. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, p.1–94.

Coniglio, Marcelo E., Francesc Esteva, and Lluís Godo (2014). Logics of formal inconsistency arising from systems of fuzzy logic. *Logic Journal of the IGPL*. First published online: June 16, 2014. doi: 10.1093/jigpal/jzu016. Preliminary version available at arXiv:1307.3667[math.LO]. http://arxiv.org/abs/1307.3667.

Coniglio, Marcelo E. and Luiz H. Silvestrini (2014). An alternative approach for Quasi-Truth. *Logic Journal of the IGPL* **22**(2): 387–410. doi: 10.1093/ljigpal/jzt026. First published online: August 6, 2013.

Costa, Newton C. A. da (1963). *Sistemas formais inconsistentes* (Inconsistent formal systems, in Portuguese). Habilitation Thesis. Republished by Editora UFPR, Curitiba, Brazil,1993. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brazil.

Gentilini, Paolo (2011). Proof theory and mathematical meaning of paraconsistent C-systems. *Journal of Applied Logic* **9**(3): 171–202. doi: 10.1016/j.jal.2011.04.001.

Girard, Jean-Yves, Paul Taylor, and Yves Lafont (1989). *Proofs and types*. New York, NY, USA: Cambridge University Press.

Jeřábek, Emil (2012). The ubiquity of conservative translations. *Review of Symbolic Logic* **5**(4): 666–78. doi: 10.1017/S1755020312000226.

Rodrigues, Tarcísio G. (2010). *On the Foundations of Paraconsistent Logic Programming*. In Portuguese. Masters Thesis. State University of Campinas.

Silva, Jairo J. da, Itala M. L. D' Ottaviano, and Antonio M. Sette (1999). Translations between logics. In: *Models, algebras and proofs*. Selected Papers of the

X Latin American Symposium on Mathematical Logic Held in Bogotá. Ed. by X. Caicedo and C.H. Montenegro. Vol. 203. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, p.435–48.

Wójcicki, Ryszard (1979). Referential Matrix Semantics for Propositional Calculi. *Bulletin of the Section of Logic* **8**: 170–6.

———. (1984). *Lectures on propositional calculi*. Available at http://www.ifispan.waw.pl/studialogica/wojcicki/papers.html . Wroclaw, Poland: Ossolineum.

Notes

[1] Here $\neg^0\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha$, and $\neg^{n+1}\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg\neg^n\alpha$.

[2] Recall from (Carnielli, Coniglio, and Marcos 2007) that $\sim_\alpha\beta \stackrel{\text{def}}{=} \beta \to \bot_\alpha$ satisfies the following: $\beta, \sim_\alpha\beta \vdash \gamma$ for every β and γ; $\vdash \beta \vee \sim_\alpha\beta$, $\vdash \beta \to \sim_\alpha\sim_\alpha\beta$, and $\vdash \sim_\alpha\sim_\alpha\beta \to \beta$, for every β.

[3] The above enumeration is by no means complete: there are other proposals in the literature dealing with sequents for **LFI**s.

[4] As usual, we define $\Gamma \vDash \varphi$ iff, for every $M \in \mathfrak{M}$, if M satisfies ψ for every $\psi \in \Gamma$ then M satisfies φ.

[5] That is: for every $M \in \mathfrak{M}$ there is a formula φ such that M does not satisfy φ.

2

Uma formalização para o termo “poucos” em sistemas lógicos dedutivos

Ana Claudia de Jesus Golzio

1. Introdução

Em sua tese de doutorado, Grácio (1999) apresentou um conjunto de sistema lógicos que buscavam formalizar, no ambiente quantificacional das linguagens artificiais, algumas noções intuitivas da linguagem natural, tais como “muitos”, “a maioria” e “uma boa parte”. Estes sistemas lógicos foram denominados por Grácio: *lógicas moduladas*.

Um destes sistemas modulados: a *lógica do muito* motivou Feitosa et al. (2009) à introduzir um sistema lógico que buscava formalizar algumas propriedades, características do quantificador da linguagem natural “muitos”, no ambiente proposicional e não mais quantificacional como feito por Grácio (1999).

Golzio (2011), motivada por estes trabalhos, apresentou uma formalização de algumas propriedades do quantificador “poucos” da linguagem natural através de um sistema lógico dedutivo, denominado *lógica proposicional para “poucos”*. Esta formalização tem por base os seguintes princípios:

a) Se poucos indivíduos do universo satisfazem a proposição φ e se todo indivíduo que satisfaz ψ, satisfaz também φ, então ψ também é satisfeita por poucos indivíduos do universo;
b) Se poucos indivíduos do universo satisfazem a proposição φ, então existe alguém que satisfaz φ;
c) O conjunto universo não contém poucos indivíduos.

Estas três propriedades quando comparadas às propriedades adotadas por Feitosa et al. (2009) permitem perceber que embora reconheçamos uma

Mortari, C. A. (org.) *Tópicos de lógicas não clássicas*.
Florianópolis: NEL/UFSC, 2014, pp. 71–82.

dualidade entre “muitos” e “poucos”, a formalização dada ao termo “poucos” neste trabalho, não será dual a formalização introduzida por estes autores. Seria possível estabelecer aqui o conceito de “poucos” como dual ao conceito de “muitos”. Entretanto, quando se afirma, por exemplo, que “Muitas pessoas são felizes”, mesmo que todas as pessoas do meu universo de discurso sejam felizes, isso não parece contrariar a noção intuitiva que temos de “muitos”. Em relação à noção de “poucos”, a afirmação: “poucas pessoas gostam de sorvete”, não parece ter sentido em um universo de discurso em que nenhum indivíduo gosta de sorvete. Por isso, a noção intuitiva de “poucos”, abordada aqui considerará que o vazio não contém poucos elementos.

O objetivo deste trabalho é apresentar a lógica proposicional para o termo “poucos” (LPP) nos sistemas dedutivos: hilbertiano, tableaux e dedução natural e analisar tais sistemas dedutivos quanto a sua capacidade de decidir se uma determinada fórmula é ou não um teorema da lógica proposicional para o termo “poucos” após um número efetivo de passos.

2. Uma lógica proposicional para o termo “poucos” na versão hilbertiana

A *lógica proposicional para o termo “poucos”* (LPP), na sua versão hilbertiana, introduzida em Golzio (2011) é definida sobre a linguagem $\mathcal{L}_P(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bot, \top, \odot)$ pelo seguinte:

- **Esquemas de axiomas:**

  Ax_{P1} Axiomas do cálculo proposicional clássico (CPC);

  Ax_{P2} $\odot\bot \leftrightarrow \bot$.

  Ax_{P3} $\odot\top \leftrightarrow \bot$.

- **Regras**:

  MP *(Modus Ponens)***:**

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \rightarrow \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$$

$$R_1\textbf{:}\quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdash \varphi \rightarrow \psi \\ \nvdash \varphi \rightarrow \bot\end{array}}{\vdash \odot\psi \rightarrow \odot\varphi}$$

$$R_2\textbf{:}\quad \dfrac{\vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\vdash \odot\varphi \leftrightarrow \odot\psi}$$

Nota: $\vdash \varphi$ significa que φ é um teorema.

Intuitivamente, o axioma (Ax_{P2}) diz que "uma contradição ter poucas evidências equivale a uma contradição" e o axioma (Ax_{P3}) diz que "uma tautologia ter poucas evidências, equivale a uma contradição". A regra (R_1) diz que "quando φ implica em ψ , se não é o caso que φ é uma contradição e ψ tem poucas evidências, então φ tem poucas evidências também" e a regra (R_2) diz que "se φ e ψ são equivalentes, então $\odot\varphi$ e $\odot\psi$ são equivalentes".

3. Uma álgebra para o termo "poucos"

Uma *álgebra para o termo "poucos"* é uma 7-upla **P**= $(P, 0, 1, \wedge, \vee, \sim, \otimes)$, tal que $(P, 0, 1, \wedge, \vee, \sim)$ é uma álgebra booleana e $\otimes$ é um operador unário, chamado *operador do pouco*, de modo que para todos x, y $\in$ P, as seguintes condições são válidas:

1. $\otimes 0 = 0$
2. $\otimes 1 = 0$
3. $0 < x \leq y \Rightarrow \otimes y \leq \otimes x$

Proposição 1. *Se* $\mathbf{P} = (P, 0, 1, \wedge, \vee, \sim, \otimes)$ *é uma álgebra para o termo "poucos" e x, y* $\in$ *P, então:*

1. *Se* $x \neq 0$*, então* $\otimes(x \vee y) \leq \otimes x$*;*
2. *Se* $x \wedge y \neq 0$*, então* $\otimes x \leq \otimes(x \wedge y)$*;*
3. *Se* $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$*, então* $\otimes(x \vee y) \leq \otimes x \wedge \otimes y$*.*

Teorema 2. *A álgebra para o termo "poucos" é um modelo correto e completo para para a LPP.*

As demonstrações dos resultados desta seção podem ser encontrados em Golzio (2011).

4. A lógica proposicional para o termo "poucos" em tableaux

A lógica proposicional para o termo "poucos" em um sistema de *tableaux* (LPP_T), de linguagem $\mathcal{L}_P(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bot, \top, \odot)$ é definida por meio do acréscimo das seguintes regras às regras que não bifurcam um ramo de um sistema de tableaux proposicional clássico:[1]

$$R_{P1} \quad \frac{\odot\bot}{\bot}$$

$$R_{P2} \quad \frac{\odot\top}{\bot}$$

$$R_{P3} \quad \frac{\neg(\odot\varphi \rightarrow \odot\psi)}{\bot}$$

Nota$_1$: A regra (R_{P3}) só se aplica se $\nVdash \psi \rightarrow \bot$ e $\Vdash \psi \rightarrow \varphi$.

Nota$_2$: Ao se deparar com uma fórmula do tipo $\neg(\odot\varphi \rightarrow \odot\psi)$ o tableau deverá aplicar primeiro a regra (R_{P3}) e só deverá aplicar a regra usual clássica ($R\neg \rightarrow$) na impossibilidade de se aplicar a regra (R_{P3}).

$$R_{P4} \quad \frac{\neg((\odot\varphi \rightarrow \odot\psi) \wedge (\odot\psi \rightarrow \odot\varphi))}{\bot}$$

Nota$_3$: A regra (R_{P4}) só se aplica se $\nVdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

A demonstração da equivalência entre a LPP (sistema axiomático) e a LPP_T, pode ser encontrada em Golzio (2011).

5. Uma lógica proposicional para o termo "poucos" em um sistema de dedução natural

Uma lógica proposicional para o termo "poucos" apresentada em um sistema de *dedução natural (LPP_{DN})*, é definida sobre a linguagem $\mathcal{L}_P(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bot, \top, \odot)$ pela adição das seguintes regras às regras de um sistema proposicional clássico de dedução natural (CPC_{DN}):[2]

$\odot$ **Regras de eliminação:**

$$E_1 \; \frac{\odot\bot}{\bot}$$

$$E_2 \; \frac{\odot\top}{\bot}$$

$\odot$ **Regras de introdução:**

$$I_1 \; \frac{\begin{array}{c}\vdash \varphi \rightarrow \psi \\ \nvdash \varphi \rightarrow \bot\end{array}}{\vdash \odot\psi \rightarrow \odot\varphi}$$

$$I_2 \; \frac{\vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\vdash \odot\varphi \leftrightarrow \odot\psi}$$

Agora vamos estabelecer a equivalência entre a LPP (sistema axiomático) introduzido em Golzio (2011) e o sistema LPP_{DN} introduzido neste trabalho. A equivalência entre um sistema axiomático e um sistema de dedução natural, ambos para a lógica proposicional clássica, já foi estabelecida por Gentzen (1969). Assim, neste trabalho, a demonstração será estendida apenas para os casos que envolve o novo operador "$\odot$".

Teorema 3. *Todas as regras da LPP_{DN} podem ser deduzidas na LPP.*

Demonstração.

I_1**:** $\vdash \varphi \rightarrow \psi, \nvdash \varphi \rightarrow \bot \Rightarrow \vdash \odot\psi \rightarrow \odot\varphi$

1	$\vdash \varphi \rightarrow \psi$	(Premissa)
2	$\nvdash \varphi \rightarrow \bot$	(Premissa)
3	$\vdash \odot\psi \rightarrow \odot\varphi$	(R_1 em 1 e 2)

I_2**:** $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \vdash \odot\varphi \leftrightarrow \odot\psi$

1	$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$	(Premissa)
2	$\vdash \odot\varphi \leftrightarrow \odot\psi$	(R_2 em 1)

E_1**:** $\odot\bot \Rightarrow \bot$

1	$\odot\bot$	(Premissa)
2	$\odot\bot \leftrightarrow \bot$	(Ax_{P2})
3	$(\odot\bot \to \bot) \wedge (\bot \to \odot\bot)$	(CPC em 2)
4	$(\odot\bot \to \bot) \wedge (\bot \to \odot\bot) \to (\odot\bot \to \bot)$	(Ax_{P1})
5	$\odot\bot \to \bot$	(MP em 3 e 4)
6	$\bot$	(MP em 1 e 5)

E_2**:** $\odot\top \Rightarrow \bot$

1	$\odot\top$	(Premissa)
2	$\odot\top \leftrightarrow \bot$	(Ax_{P3})
3	$(\odot\top \to \bot) \wedge (\bot \to \odot\top)$	(CPC em 2)
4	$(\odot\top \to \bot) \wedge (\bot \to \odot\top) \to (\odot\top \to \bot)$	(Ax_{P1})
5	$\odot\top \to \bot$	(MP em 3 e 4)
6	$\bot$	(MP em 1 e 5)

□

Teorema 4. *Todos os axiomas e regras da LPP podem ser deduzidos na* LPP_{DN}.

Demonstração.

Ax_{P1}**:** $\odot\bot \leftrightarrow \bot$

1	$\odot\bot$	(Premissa)
2	$\bot$	(E_1 em 1)
3	$\odot\bot \to \bot$	(CPC_{DN} 1-2)
4	$\bot \to \odot\bot$	(Teorema do CPC_{DN})
5	$\odot\bot \leftrightarrow \bot$	(CPC_{DN} em 3 e 4)

Ax_{P2}**:** $\odot\top \leftrightarrow \bot$

1	$\odot\top$	(Premissa)
2	$\bot$	(E_2 em 1)
3	$\odot\top \to \bot$	(CPC_{DN} 1-2)
4	$\bot \to \odot\top$	(Teorema do CPC_{DN})
5	$\odot\top \leftrightarrow \bot$	(CPC_{DN} em 3 e 4)

R_1**:** $\vdash \varphi \to \psi, \nvdash \varphi \to \bot \Rightarrow \vdash \odot\psi \to \odot\varphi$

1	$\vdash \varphi \to \psi$	(Premissa)
2	$\nvdash \varphi \to \bot$	(Premissa)
3	$\vdash \odot\psi \to \odot\varphi$	(I_1 em 1 e 2)

R_2**:** $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \vdash \odot\varphi \leftrightarrow \odot\psi$

1	$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$	(Premissa)
2	$\vdash \odot\varphi \leftrightarrow \odot\psi$	(I_2 em 1)

□

6. Alguns resultados em LPP, LPP_T e LPP_{DN}

1) Uma contradição não contém poucas evidências, em outras palavras, $\vdash \neg \odot \bot$.

Na LPP:

1	$\odot\bot \leftrightarrow \bot$	(Ax_{P2})
2	$(\odot\bot \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \odot\bot)$	(CPC em 1)
3	$\odot\bot \rightarrow \bot$	(CPC em 2)
4	$\neg\bot$	(CPC)
5	$\neg \odot \bot$	(CPC em 3 e 4)

Na LPP_{DN}:

1	$\odot\bot$	(Premissa)
2	$\bot$	(E_1 em 1)
3	$\odot\bot \rightarrow \bot$	(CPC_{DN} 1-2)
4	$\neg\bot \rightarrow \neg \odot \bot$	(CPC_{DN} e 3)
5	$\neg\bot$	(CPC)
6	$\neg \odot \bot$	(CPC_{DN} em 4 e 5)

Na LPP_T:

(1)	$\neg\neg \odot \bot$	
(2)	$\odot\bot$	[1,$R\neg\neg$]
(3)	$\bot$	[2,R_{P1}]
	$\times$	

2) $\nvdash \varphi \rightarrow \bot \Rightarrow \vdash \odot(\varphi \vee \psi) \rightarrow \odot\varphi$

Na LPP:

1	$\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	(CPC)
2	$\nvdash \varphi \rightarrow \bot$	(Premissa)
3	$\vdash \odot(\varphi \vee \psi) \rightarrow \odot\varphi$	(R_1 em 1 e 2)

Na LPP_{DN}:

1	$\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$	(CPC)
2	$\nvdash \varphi \to \bot$	(Premissa)
3	$\vdash \odot(\varphi \vee \psi) \to \odot\varphi$	(I_1 em 1 e 2)

Na LPP_T:

(1)	$\neg(\odot(\varphi \vee \psi) \to \odot\varphi)$	
(2)	$\bot$	$[1, R_{P3}]$*
	$\times$	

*Para aplicar R_{P3} é necessário verificar

se $\nVdash \varphi \to \bot$:

(1)	$\neg(\varphi \to \bot)$	
(2)	φ	$[1, R\neg \to]$
(3)	$\neg\bot$	$[1, R\neg \to]$
	tableau aberto	

e se $\Vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$:

(1)	$\neg(\varphi \to (\varphi \vee \psi))$	
(2)	φ	$[1, R\neg \to]$
(3)	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$[1, R\neg \to]$
(4)	$\neg\varphi$	$[3, R\neg\vee]$
(5)	$\neg\psi$	$[3, R\neg\vee]$
	$\times$	

3) $\nvdash \varphi \wedge \psi \to \bot \Rightarrow \vdash \odot\varphi \to \odot(\varphi \wedge \psi)$

Na LPP:

1	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	(CPC)
2	$\nvdash (\varphi \wedge \psi) \to \bot$	(Premissa)
3	$\vdash \odot\varphi \to \odot(\varphi \wedge \psi)$	(R_1 em 1 e 2)

Na LPP_{DN}:

1	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	(CPC)
2	$\nvdash (\varphi \wedge \psi) \to \bot$	(Premissa)
3	$\vdash \odot\varphi \to \odot(\varphi \wedge \psi)$	(I_1 em 1 e 2)

Na LPP_T:

(1)	$\neg(\odot\varphi \rightarrow \odot(\varphi \wedge \psi))$	
(2)	$\bot$	[1,R_{P3}]*
	$\times$	

*Para aplicar R_{P3} é necessário verificar

se $\nVdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \bot$:

(1)	$\neg(\varphi \wedge \psi \rightarrow \bot)$	
(2)	$\varphi \wedge \psi$	[1,$R\neg\rightarrow$]
(3)	$\neg\bot$	[1,$R\neg\rightarrow$]
(4)	φ	[2,$R\wedge$]
(5)	ψ	[2,$R\wedge$]
	tableau aberto	

e se $\Vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$:

(1)	$\neg(\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi)$	
(2)	$\varphi \wedge \psi$	[1,$R\neg\rightarrow$]
(3)	$\neg\varphi$	[1,$R\neg\rightarrow$]
(4)	φ	[2,$R\wedge$]
(5)	ψ	[2,$R\wedge$]
	$\times$	

4) Uma tautologia não contém poucas evidências, ou seja, $\vdash \neg\odot\top$

Na *LPP*:

1	$\odot\top \leftrightarrow \bot$	(Ax_{P3})
2	$(\odot\top \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \odot\top)$	(CPC em 1)
3	$\odot\top \rightarrow \bot$	(CPC em 2)
4	$\neg\bot$	(CPC)
5	$\neg\odot\top$	(CPC em 3 e 4)

Na LPP_{DN}:

1	$\odot\top$	(Premissa)
2	$\bot$	(E_1 em 1)
3	$\odot\top \rightarrow \bot$	(CPC_{DN} 1-2)
4	$\neg\bot \rightarrow \neg\odot\top$	(CPC_{DN} em 3)
5	$\neg\bot$	(CPC)
6	$\neg\odot\top$	(CPC_{DN} em 4 e 5)

Na LPP_T:

(1)	$\neg\neg \odot \top$	
(2)	$\odot\top$	$[1, R\neg\neg]$
(3)	$\bot$	$[2, R_{P2}]$
	$\times$	

Um contra-exemplo na LPP_T:

Vamos mostrar que $\nVdash \odot\varphi \to \odot(\varphi \wedge \neg\varphi)$:

Suponha que $\Vdash \odot\varphi \to \odot(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

(1)	$\neg(\odot\varphi \to \odot(\varphi \wedge \neg\varphi))$	
(2)	$\neg \odot (\varphi \wedge \neg\varphi)$	$[1, R\neg \to]$
(3)	$\odot\varphi$	$[1, R\neg \to]$
	tableau aberto*	

*Para aplicar R_{P3} é necessário verificar se $\nVdash \varphi \wedge \neg\varphi \to \bot$:

(1)	$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi \to \bot)$	
(2)	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$[1, R\neg \to]$
(3)	$\neg\bot$	$[1, R\neg \to]$
	$\times$**	

**Logo, não podemos aplicar R_{P3} no tableau construído para $\neg(\odot\varphi \to \odot(\varphi \wedge \neg\varphi))$, portanto temos que $\nVdash \odot\varphi \to \odot(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

7. Considerações Finais

Ao pensar no termo "poucos" da linguagem natural, podemos formular questões como: "O que são poucos?", "Quantos elementos são necessários a certo conjunto para que seja possível dizer que este conjunto possui poucos elementos?". Claramente, para responder a tais questões é necessário definir em qual universo de discurso elas estão sendo abordadas. Entretanto, apesar da dependência que o conceito de "poucos" parece ter de um contexto, é possível estabelecer algumas propriedades universais (isto é, válidas em qualquer universo de discurso) para o conceito de "poucos".

Por exemplo, na afirmação "Na escola há poucos alunos", apesar de não ser possível saber quantas crianças há na sala e nem quantas crianças seriam necessárias para encher a sala, é possível dizer que existe alguém na sala. Também parece razoável dizer que a sala não está cheia (não está com todas as crianças que caberiam na sala).

Em termos conjuntista, parece legítimo concluir três propriedades fundamentais associadas à noção intuitiva de “poucos” e que independem do contexto. São elas: “Se um conjunto tem poucos elementos, então ele não é vazio”, “o universo de discurso não possui poucos elementos” e “se um conjunto A tem poucos elementos, então um conjunto B contido em A e não vazio, também tem poucos elementos”.

Tais noções intuitivas levaram ao desenvolvimento de uma álgebra para o termo “poucos” e também de uma lógica para tratar do termo “poucos” em ambiente proposicional, a LPP.

A lógica proposicional para “poucos” foi apresentada em três sistemas dedutivos: Hilbertiano, dedução natural e tableaux. As versões hilbertiana e tableaux da LPP foram apresentadas pela primeira vez em Golzio (2011), enquanto que a versão da LPP em dedução natural foi introduzida neste trabalho.

Uma breve comparação entre os três sistemas dedutivos permite concluir que entre os sistemas hilbertiano e de dedução natural, o sistema de dedução natural é o mais eficiente, pois, por trabalhar com o princípio das subfórmulas, a medida em que as regras do sistema são aplicadas, as fórmulas têm sua complexidade cada vez menor, assim, há um decréscimo no grau de complexidade das fórmulas. Já para fazer uma dedução em um sistema hilbertiano, é necessária a colocação de axiomas o que torna a dedução um pouco mais longa e demorada se comparada a uma dedução pelo método de dedução natural.

Já em relação aos sistemas de dedução natural e de tableaux, o sistema de dedução natural leva vantagem em relação ao tamanho das deduções, pois, apesar de ambos trabalharem com o princípio das subfórmulas, como na LPP_T duas das regras precisam garantir certas condições para serem aplicadas, então, algumas deduções na LPP_T são bem maiores, quando comparadas às deduções na LPP_{DN}. Entretanto, quando pensamos na finalidade de cunho computacional, o sistema de tableaux seria a melhor opção, pois tem a propriedade da decidibilidade e possui um algoritmo que pode ser implementado de maneira eficiente por uma máquina.

Agradecimentos

Este artigo é resultado da Dissertação de Mestrado da autora, orientada pelo Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa, e foi elaborado com apoio financeiro da FAPESP.

Referências

Feitosa, H. A.; Nascimento, M. C.; Grácio, M. C. C. 2009. Algebraic element for the notion of 'many'. *CLE e-Prints* **9**: 1–22.

Gentzen, G. 1969. *Collected Papers*. Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Golzio, A. C. J. 2011. Elementos algébricos para a noção de "poucos" e sua formalização em sistemas lógicos dedutivos. Master's thesis. Marília: Faculdade de Filosofia e Ciências, Pós-Graduação em Filosofia, Universidade Estadual Paulista (UNESP).

Grácio, M. C. C. 1999. *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*. PhD thesis. Campinas: Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp).

Smullyan, R. M. 1968. *First-order logic*. New York: Springer-Verlag/Dover Publication.

Notas

[1] Para consultar as regras de um sistema proposicional clássico de tableaux, consultar Smullyan (1968).

[2] Para consultar as regras de um sistema proposicional clássico de dedução natural, consultar Gentzen (1969)

3

Um pouco sobre traduções entre lógicas

Angela Pereira Rodrigues Moreira
Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano

1. Traduções

1.1. As 'traduções' de Kolmogorov

Andrei Nikolaevich Kolmogorov publicou um artigo em 1925, em russo, a respeito de uma tradução — este termo não foi utilizado — entre a lógica proposicional clássica e a lógica formal intuicionista por ele sugerida. Provavelmente, por ter sido publicado em russo não foi tão utilizado e reconhecido na época. Apenas em 1977, com consentimento de Kolmogorov, o artigo foi traduzido para o inglês pelo lógico Heijenoort.

O artigo é inovador por antecipar a formalização da lógica intuicionista de Heyting e por explicitar resultados, através de uma tradução, da lógica proposicional clássica para a lógica proposicional intuicionista.

Kolmogorov (1977) introduziu a lógica formal intuicionista **B** e o cálculo proposicional clássico **H**. O sistema **B** foi inspirado nas ideias intuicionistas de Brouwer sobre o uso ilegítimo do princípio do terceiro excluído, formaliza, assim, o que Kolmogorov denomina a *lógica geral das sentenças* e é equivalente ao que conhecemos por sistema intuicionista minimal de Johansson (ver (Johansson, 1936)). O sistema **H** formaliza o que ele denomina *lógica especial das sentenças*, e é equivalente ao cálculo proposicional clássico do formalista Hilbert.

O sistema original de Hilbert (1922) possui uma linguagem formal com símbolo para a implicação, $\rightarrow$, e símbolo para a negação, $\neg$. Os axiomas e regras são os seguintes:

Axiomas da implicação:

Mortari, C. A. (org.) *Tópicos de lógicas não clássicas*.
Florianópolis: NEL/UFSC, 2014, pp. 83–111.

1. $A \to (B \to A)$,
2. $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$,
3. $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$,
4. $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

Axiomas da negação:

1. $A \to (\neg A \to B)$,
2. $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$.

Regras de inferência:

Modus Ponens: $A, A \to B \ / \ B$,

Substituição: $\vdash A(p) \ / \ \vdash A(p/B)$.

Segundo Kolmogorov, os quatro axiomas da implicação de Hilbert são intuitivos, bem como as regras de inferência, porém, os axiomas da negação não o são. Os dois axiomas da negação, sendo que o segundo expressa o princípio do terceiro excluído, não possuem fundamentação intuitiva, a saber, o primeiro afirma que devemos aceitar **B** se a verdade da sentença A é considerada falsa. Desta forma, o primeiro axioma da negação pode talvez ser demonstrado, mas não tomado como um axioma da lógica geral das sentenças.

O sistema **B**, de mesma linguagem que o sistema de Hilbert, possui as mesmas regras de inferência e tem como axiomas os axiomas da implicação e o seguinte:

$$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A).$$

O sistema **H** é a extensão do sistema **B** obtida pelo acréscimo do axioma:

$$\neg\neg A \to A.$$

Foi afirmado por Kolmogorov que o sistema **H** é equivalente ao sistema proposto por Hilbert e os axiomas da negação de Hilbert foram demonstrados em H.

Foram introduzidos os símbolos, A^*, B^*, C^*, $\ldots$, para denotar sentenças do tipo $\neg\neg A \to A$.

Demonstrou-se, resultado já obtido por Brouwer, que $\vdash_B \neg\neg\neg A \to \neg A$, ou seja, toda sentença negativa é do tipo A^*. E também que $A^* \to B^*$ é uma sentença do tipo A^*, isto é, $\neg\neg(A^* \to B^*) \to (A^* \to B^*)$. Daí, toda fórmula expressada pelos símbolos A^*, B^*, C^*, $\ldots$, $\neg$ e $\to$ é do tipo A^*.

A partir da matemática usual o autor pretendia construir uma *pseudomatemática*, de forma que a cada fórmula da matemática usual corresponde uma fórmula da pseudomatemática que é do tipo A^*. Com esta motivação, definiu-se a função k de **H** em **B**, que associa a cada fórmula A de **H** uma fórmula A^k de **B**, em que A^k é obtida de A acrescentando uma dupla negação à frente de toda subfórmula de A, formalmente, temos:

$$\begin{aligned}(p)^k &=_{\text{def}} \neg\neg p,\\ (\neg A)^k &=_{\text{def}} \neg\neg(\neg A^k),\\ (A \to B)^k &=_{\text{def}} \neg\neg(A^k \to B^k).\end{aligned}$$

A partir desta tradução, segue o teorema abaixo.

Teorema 1.1.1. *Se* $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *é um conjunto de axiomas e* $\mathbf{A} \vdash_{\mathbf{H}} A$*, então* $\mathbf{A}^k \vdash_{\mathbf{B}} A^k$*, com* $\mathbf{A}^k = \{A_1^k, A_2^k, \ldots, A_n^k\}$.

Embora não tenha demonstrado, Kolmogorov sugere que o teorema enunciado acima pode ser estendido a sistemas quantificacionais e, em geral, a toda matemática conhecida, antecipando os resultados de Gödel e Gentzen sobre a consistência relativa da aritmética clássica em relação à aritmética intuicionista.

1.2. As 'traduções' de Glivenko

O trabalho de Glivenko (1929), assim como o de Kolmogorov, envolve interações entre os cálculos proposicionais clássico e intuicionista. Ele assume as regras *modus ponens* e substituição e os axiomas a seguir como aceitáveis na lógica proposicional de Brouwer.

1. $A \to A$,
2. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$,
3. $A \wedge B \to A$,
4. $A \wedge B \to B$,
5. $(C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to A \wedge B))$,
6. $A \to A \vee B$,

7. $B \to A \vee B$,
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$,
9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$,
10. $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$,
11. $(A \to (A \to C)) \to (A \to C)$,
12. $(A \to B) \to A$,
13. $(\neg B \to B) \to A$.

A lógica proposicional clássica é obtida estendendo-se o sistema acima descrito pela introdução da fórmula que representa o princípio do terceiro excluído, $\neg A \vee A$.

Este artigo também não utilizou o termo tradução, mas o seu principal resultado é o seguinte:

Teorema 1.2.1. *Se uma determinada fórmula, A, é demonstrável na lógica proposicional clássica, então a dupla negação desta fórmula, $\neg\neg A$, é demonstrável na lógica proposicional de Brouwer.*

Consideramos que este resultado envolve uma tradução, pois podemos pensar numa função cuja imagem de cada fórmula, A, na lógica proposicional clássica é sua dupla negação, $\neg\neg A$, na lógica proposicional de Brouwer.

Outro resultado é destacado no artigo e é consequência do Teorema 1.2.1.

Corolário 1.2.2. *Se a negação de uma fórmula, $\neg A$, é demonstrável na lógica proposicional clássica, então a mesma negação é demonstrável na lógica proposicional de Brouwer.*

A demonstração deste corolário é feita utilizando o que Glivenko demonstrou, assim como Kolmogorov, que a fórmula $\neg\neg\neg A \to \neg A$ é um resultado da lógica proposicional de Brouwer. Pelo Teorema 1.2.1, se $\neg A$ é um teorema da lógica proposicional clássica, então $\neg\neg\neg A$ é um teorema da lógica proposicional de Brouwer, logo, como $\neg\neg\neg A \to \neg A$ é um teorema da lógica proposicional de Brouwer, pela regra modus ponens, $\neg A$ é um teorema também da lógica proposicional de Brouwer.

1.3. As 'traduções' de Gödel

Em 1933 Gödel publicou dois artigos envolvendo traduções entre lógicas. Um a respeito de uma tradução primeiramente estabelecida entre os cálculos proposicionais clássico e intuicionista e, posteriormente, estendida para uma tradução entre as aritméticas clássica e intuicionista. Outro sobre uma tradução do cálculo proposicional intuicionista no cálculo modal **G**. Nesta seção falaremos sobre estas traduções.

1.3.1 A 'tradução' da aritmética clássica na aritmética intuicionista

Em 28 de junho de 1932, em Viena, numa conferência dada por Gödel no Colóquio de Matemática, tornou-se público o texto de Gödel, em que demonstrou que se A é um teorema do cálculo proposicional clássico (CPC), então a tradução de A é um teorema do cálculo proposicional intuicionista (CPI) de Heyting; além disso, demonstrou que se A é um teorema da aritmética clássica (de Herbrand (1931)), então, sua tradução é um teorema da aritmética intuicionista (de Heyting com algumas ampliações). Apesar de não estar preocupado com o conceito de tradução, Gödel utiliza o termo tradução, bem como os termos interpretação e correspondência.

O trabalho de Glivenko (1929) é citado e utilizado por Gödel (1981), o de Kolmogorov não, Gödel provavelmente não tinha conhecimento deste último, pois ainda não havia sido traduzido para o inglês.

Neste artigo, os símbolos clássicos são denotados por $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, enquanto que os símbolos intuicionistas são denotados por $\sim$, Δ, ∇, $\supset$ e $\supset\subset$.

Teorema 1.3.1. *Se considerarmos uma fórmula, A, construída apenas com os conectivos $\neg$ e $\wedge$, que é um teorema do CPC, então a tradução direta desta fórmula no CPI, ou seja, a fórmula, A', obtida ao trocarmos $\neg$ por $\sim$ e $\wedge$ por Δ, é um teorema do CPI.*

Para demonstrar este resultado, Gödel utilizou o Corolário 1.2.2 de Glivenko (1929). A fórmula A, como mencionada acima, é uma fórmula do tipo $\neg A_1 \wedge \cdots \wedge \neg A_n$, daí, cada fórmula $\neg A_i$, $1 \leq i \leq n$, é um teorema do CPC, logo, cada tradução direta $\sim A_i$, $1 \leq i \leq n$, é um teorema do CPI, portanto, $\sim A_1 \,\Delta \ldots \Delta \sim A_n$ é um teorema do CPI.

Como os outros conectivos clássicos podem ser definidos em função dos conectivos $\neg$ e $\wedge$, então, para que a tradução de cada teorema do CPC seja um teorema do CPI a seguinte tradução foi definida:

$$\begin{aligned}
(p)^G &=_{\text{def}} p,\\
(\neg A)^G &=_{\text{def}} \sim A^G,\\
(A \to B)^G &=_{\text{def}} \sim(A^G \,\Delta \sim B^G),\\
(A \vee B)^G &=_{\text{def}} \sim(\sim A^G \,\Delta \sim B^G),\\
(A \wedge B)^G &=_{\text{def}} A^G \,\Delta\, B^G.
\end{aligned}$$

Teorema 1.3.2. *Se considerarmos uma fórmula A qualquer do CPC, então a tradução desta fórmula no CPI, ou seja, a fórmula A^G, é um teorema do CPI.*

Com o intuito de demonstrar algo semelhante para toda a aritmética, Gödel utilizou um sistema formal da aritmética clássica, $\mathbf{H_1}$, baseado no sistema semiformal de Herbrand (1931), e um sistema formal correspondente à aritmética intuicionista baseado no sistema de Heyting, $\mathbf{H_2}$. Como o sistema de Heyting possui apenas variáveis para indivíduos, x, y, z, ... e não possui variáveis numéricas, foram introduzidas novas variáveis x', y', z', ..., para números naturais. Para estas variáveis, temos a tradução: $\forall x A(x')$ equivale a $\forall x(x \in N \supset A(x'))$ e uma fórmula $A(x', y', \dots)$, com x', y', ... livres, é equivalente a $x, y, \dots \in N \supset A(x, y, \dots)$. Assim, cada fórmula contendo variáveis numéricas é equivalente a uma fórmula contendo apenas as variáveis para indivíduos.

A tradução do sistema $\mathbf{H_1}$ no sistema $\mathbf{H_2}$ é uma extensão da tradução G:

$$\begin{aligned}
(x_i)^G &=_{\text{def}} x_i',\\
(f_i)^G &=_{\text{def}} f_i, \text{ em que cada } f_i \text{ é um símbolo funcional},\\
(=)^G &=_{\text{def}} =,\\
(0)^G &=_{\text{def}} 1,\\
(+1)^G &=_{\text{def}} s, \text{ em que } s \text{ designa o sucessor},\\
(\forall x A)^G &=_{\text{def}} \forall x' A^G.
\end{aligned}$$

Uma *fórmula* $\mathbf{H_2}$*-numérica* é uma fórmula que é a tradução de alguma *fórmula numérica* (fórmula de $\mathbf{H_1}$).

Os resultados abaixo foram demonstrados.

Lema 1.3.3. *Para cada fórmula* $\mathbf{H_2}$*-numérica* A^G*, temos que a fórmula* $\sim\sim A^G \supset A^G$ *é um teorema de* $\mathbf{H_2}$.

Lema 1.3.4. *Para quaisquer fórmulas* $\mathbf{H_2}$*-numéricas* A^G *e* B^G*, temos que a fórmula* $(A^G \supset B^G) \supset\subset \sim(A^G \, \Delta \sim B^G)$ *é um teorema de* $\mathbf{H_2}$.

Teorema 1.3.5. *Se a fórmula* A *é um teorema de* $\mathbf{H_1}$*, então sua tradução* A^G *é um teorema de* $\mathbf{H_2}$.

Este teorema proporcionou uma demonstração da consistência relativa da aritmética clássica em relação à intuicionista, ou seja, se a aritmética clássica for contraditória, a intuicionista também o é. Logo, se nos convencermos que a aritmética intuicionista é consistente, devemos também nos convencer que a aritmética clássica é consistente. No artigo, Gödel afirma que, a partir dos resultados aqui enunciados, a consistência da aritmética clássica foi demonstrada, porém de uma maneira não finitária.

1.3.2 A 'tradução' do CPI no cálculo modal G

Em (Gödel, 1986), Gödel descreveu uma tradução do CPI no sistema modal **G**, que consiste de um CPC enriquecido com um novo operador B. A letra B dada para o novo operador vem da palavra em alemão *beweisbar*, que significa demonstrável, assim, uma fórmula do tipo $\mathsf{B}A$ é interpretada como "A é demonstrável".

O sistema **G** é uma extensão de um CPC pela adição dos axiomas e regra a seguir:

Axiomas:

1. $\mathsf{B}A \to A$,
2. $\mathsf{B}A \to (\mathsf{B}(A \to C) \to \mathsf{B}C)$,
3. $\mathsf{B}A \to \mathsf{BB}A$.

Regra:

$A \,/\, \mathsf{B}A$.

A tradução, $G2$, do CPI em **G** é dada por:

$$\begin{aligned}
(p)^{G2} &=_{\text{def}} p, \\
(\sim A)^{G2} &=_{\text{def}} \neg \mathsf{B}A^{G2}, \\
(A \supset C)^{G2} &=_{\text{def}} \mathsf{B}A^{G2} \to \mathsf{B}C^{G2}, \\
(A \nabla C)^{G2} &=_{\text{def}} \mathsf{B}A^{G2} \vee \mathsf{B}C^{G2}, \\
(A \Delta C)^{G2} &=_{\text{def}} A^{G2} \wedge C^{G2}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.3.6. *Se uma fórmula, A, é um teorema do CPI, então sua tradução, A^{G2}, é um teorema de G.*

Pode-se traduzir, com igual sucesso, $\sim A$ por $\mathsf{B}\neg\mathsf{B}A^{G2}$ e $A \Delta C$ por $\mathsf{B}A^{G2} \wedge \mathsf{B}C^{G2}$.

Gödel faz alguns comentários que escrevemos abaixo.

O sistema **G** é equivalente ao sistema de implicação estrita **S4** de Lewis, se a fórmula $\mathsf{B}A$ é traduzida como $\Box A$.

A tradução da fórmula que denota o princípio do terceiro excluído, $p \nabla \sim p$, não é um teorema de **G**. Além disso, qualquer fórmula do tipo $\mathsf{B}A \nabla \mathsf{B}C$, em que $\mathsf{B}A$ e $\mathsf{B}C$ não são teoremas de **G**, não é teorema de **G**.

O operador B deve ser entendido como "é demonstrável por qualquer meio correto" e não "é demonstrável num dado sistema formal", pois isto entraria em conflito com o segundo teorema da incompletude.

Gödel conjecturou que a fórmula A é um teorema do CPI se, e somente se, A^{G2} é um teorema de **G**. Este resultado foi demonstrado em (McKinsey & Tarski 1948) através de semânticas algébricas.

Troelstra na nota introdutória deste artigo, (Gödel 1986), fala sobre outros resultados envolvendo traduções que surgiram após este artigo. A seguir explicitaremos estes resultados.

McKinsey e Tarski (1948) propuseram diferentes traduções com a propriedade conjecturada por Gödel, do CPI no sistema **S4**, por exemplo, a tradução que denotaremos por MT:

$$\begin{aligned}
(p)^{MT} &=_{\text{def}} \Box p, \\
(\sim A)^{MT} &=_{\text{def}} \Box\neg A^{MT}, \\
(A \supset B)^{MT} &=_{\text{def}} \Box A^{MT} \to \Box B^{MT},
\end{aligned}$$

$$(A \nabla B)^{MT} =_{\text{def}} A^{MT} \vee B^{MT},$$
$$(A \Delta B)^{MT} =_{\text{def}} A^{MT} \wedge C^{MT}.$$

Ainda em (McKinsey & Tarski 1948) encontramos a demonstração do seguinte resultado comentado por Gödel: se $\vdash_{S4} \Box A \vee \Box B$, então $\vdash_{S4} \Box A$ ou $\vdash_{S4} \Box B$. Com a propriedade que segue da tradução acima, temos que: se $\vdash_{CPI} A \vee B$, então $\vdash_{CPI} A$ ou $\vdash_{CPI} B$.

Podemos obter uma tradução, com a propriedade conjecturada por Gödel, mas que ao invés do sistema **S4** utilizamos um sistema mais forte, que é o sistema **S4** acrescido por uma fórmula equivalente ao axioma de Grzegorczyk: $\Box(\Box(A \to \Box A) \to A) \to A$. Também conseguimos este resultado enfraquecendo **S4** para **S3**.

Rasiowa e Sikorski (1953) estenderam a conjectura de Gödel para a lógica de predicados, por meio de semânticas algébricas. Sejam CQI e QS4, respectivamente, o cálculo de predicado intuicionista e S4 com quantificadores e axiomas e regras usuais para quantificadores. A tradução G2 de Gödel pode ser estendida por:

$$(\forall x A)^{G2} =_{\text{def}} \forall x A^{G2},$$
$$(\exists x A)^{G2} =_{\text{def}} \exists x \Box A^{G2}.$$

Esta propriedade conjecturada por Gödel ainda foi estendida por Goodman (1984), que define uma tradução da aritmética intuicionista em uma extensão modal da aritmética clássica de primeira ordem, como segue:

$$\begin{aligned}
(A)^{GA} &=_{\text{def}} A, \text{ para } A \text{ atômica},\\
(\sim A)^{GA} &=_{\text{def}} \neg A^{GA},\\
(A \supset B)^{GA} &=_{\text{def}} \Box(A^{GA} \to B^{GA}),\\
(A \nabla B)^{GA} &=_{\text{def}} \Box A^{GA} \vee \Box B^{GA},\\
(A \Delta B)^{GA} &=_{\text{def}} A^{GA} \wedge B^{GA},\\
(\forall x A)^{GA} &=_{\text{def}} \Box \forall x A^{GA},\\
(\exists x A)^{GA} &=_{\text{def}} \exists x \Box A^{GA}.
\end{aligned}$$

Em relação ao primeiro artigo de Gödel, tratado na seção 1.3.1, vemos que na tradução de Gödel da aritmética clássica na aritmética intuicionista precisou-se traduzir os conectivos $\rightarrow$ e $\vee$ em função dos conectivos $\sim$ e Δ. Em 1936, Gentzen simplificou este resultado traduzindo diretamente $\rightarrow$ por $\supset$. O artigo de Gentzen é tratado na próxima seção.

1.4. A 'tradução' de Gentzen

Gentzen (1969) apresentou, assim como nos trabalhos já mencionados, uma tradução, denominada pelo autor por transformação, de um sistema clássico num sistema intuicionista, seu trabalho é rigoroso e todas as demonstrações contidas são aceitáveis do ponto de vista intuicionista.

São descritos os axiomas e regras utilizados na aritmética clássica e na aritmética intuicionista. Em que a aritmética clássica possui todos os axiomas e regras intuicionistas mais o axioma $\neg\neg A \rightarrow A$. Não há distinção entre os símbolos da aritmética clássica e intuicionista.

O autor também demonstra resultados sobre os casos para os quais a fórmula $\neg\neg A \rightarrow A$ é um teorema na aritmética intuicionista, os enunciamos abaixo.

Teorema 1.4.1. *Sejam A e B fórmulas quaisquer e x uma variável que ocorre livre em A. Se $\neg\neg A \rightarrow A$ e $\neg\neg B \rightarrow B$ são teoremas da aritmética intuicionista, então $\neg\neg(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge B)$, $\neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$, $\neg\neg(\neg A) \rightarrow (\neg A)$ e $\neg\neg\forall xA \rightarrow \forall xA$ também o são.*

Teorema 1.4.2. *Seja A uma fórmula sem os símbolos $\vee$ e $\exists$, na qual todas as subfórmulas atômicas são prefixadas por $\neg$. Então, $\neg\neg A \rightarrow A$ é um teorema da aritmética intuicionista.*

Com estes dois teoremas, o resultado principal, a respeito da tradução entre as aritméticas clássica e intuicionista, é demonstrado.

Teorema 1.4.3. *Uma derivação da aritmética clássica com a fórmula final A é transformável numa derivação da aritmética intuicionista com a fórmula final A^*, em que A^* é obtida de A por: cada subfórmula de A que tenha a forma $B \vee C$ é substituída por $\neg(\neg B \wedge \neg C)$; cada subfórmula de A que tenha a forma $\exists xB$ é substituída por $\neg\forall x\neg B$; e cada fórmula atômica contendo uma variável proposicional p é substituída por $\neg\neg p$.*

Podemos descrever a tradução implícita neste enunciado como segue:

$$\begin{aligned}
(p)^{GZ} &=_{\text{def}} \neg\neg p, \\
(\neg A)^{GZ} &=_{\text{def}} \neg A^{GZ}, \\
(A \to B)^{GZ} &=_{\text{def}} A^{GZ} \to B^{GZ}, \\
(A \vee B)^{GZ} &=_{\text{def}} \neg(\neg A^{GZ} \wedge \neg B^{GZ}), \\
(A \wedge B)^{GZ} &=_{\text{def}} A^{GZ} \wedge B^{GZ}, \\
(\forall x A)^{GZ} &=_{\text{def}} \forall x A^{GZ}, \\
(\exists x A)^{GZ} &=_{\text{def}} \neg(\forall x \neg A^{GZ}).
\end{aligned}$$

As consequências do Teorema 1.4.3, entre elas a consistência relativa da aritmética clássica em relação à aritmética intuicionista, são enunciadas abaixo.

Corolário 1.4.4. *Uma derivação na aritmética clássica cuja fórmula final, A, não contém variáveis proposicionais, nem os símbolos* $\vee$ *e* $\exists$ *pode ser transformada numa derivação na aritmética intuicionista com mesma fórmula final A.*

Corolário 1.4.5. *Para toda fórmula da aritmética clássica existe uma fórmula classicamente equivalente a ela, que é derivável na aritmética intuicionista, se, e somente se, a fórmula dada é derivável na aritmética clássica.*

Corolário 1.4.6. *Se a aritmética intuicionista é consistente, então a aritmética clássica é consistente.*

Corolário 1.4.7. *Para toda fórmula que envolve apenas os símbolos lógicos, existe uma fórmula classicamente equivalente a ela, que é derivável na lógica de predicados intuicionista, se, e somente se, a fórmula dada é derivável na lógica de predicados clássica.*

Na lógica e na aritmética intuicionistas apenas os resultados obtidos por meio de processos construtivos são aceitáveis, assim, perdem-se algumas demonstrações comumente feitas, respectivamente, na lógica e na aritmética clássicas. Neste sentido, o conjunto dos teoremas obtidos num sistema intuicionista está imerso no conjunto dos teoremas obtidos num sistema clássico. O que vemos com estes trabalhos é que, sob uma determinada tradução, é possível fazer a imersão de um sistema clássico num sistema intuicionista e, obter uma relevante consequência, o fato de que a consistência da lógica e da aritmética intuicionistas implica na consistência, respectivamente, da lógica e da aritmética clássicas.

Existem outros exemplos de traduções encontrados na literatura, mas os acima mencionados são resultados importantes que deram base para o desenvolvimento do conceito de tradução. Seguem na próxima seção algumas definições de tradução entre lógicas.

1.5. Algumas definições de traduções entre lógicas

Com o que colocamos até agora, vemos que vários autores recorreram a traduções para obter um determinado resultado, seja perante a lógica ou perante a matemática. Cada tradução possui suas próprias características e especificidades, dependendo do resultado que se deseja alcançar. Claramente, na lógica e na matemática não tomamos objetos e os utilizamos sem defini-los. Apesar de percebermos que traduções são funções, são funções especiais que fazem jus serem estudadas. Assim, os autores que apresentamos a seguir se preocuparam em identificar quais as principais características do que atualmente é chamado de tradução entre lógicas, dando início a uma teoria de traduções, que estuda o método de traduções entre lógicas e suas interrelações.

O artigo de Prawitz e Malmnäs (1968) foi o primeiro a introduzir uma definição geral para o conceito de tradução entre sistemas lógicos, dada como segue.

Definição 1.5.1. Uma *interpretação* de um sistema lógico S_1 em um sistema lógico S_2 é dada por uma função ou *tradução* t do conjunto de fórmulas de S_1 no conjunto de fórmulas de S_2 de maneira que, para cada fórmula A de S_1, $\vdash_{S_1} A$ se, e somente se, $\vdash_{S_2} t(A)$.

Se existe uma interpretação, dada pela tradução t, entre os sistemas S_1 e S_2, então, S_1 é dito *interpretável* em S_2 por t.

Encontramos também neste artigo uma definição de tradução que preserva a derivabilidade.

Definição 1.5.2. Sejam S_1 e S_2 sistemas lógicos, S_1 *interpretável* em S_2 por t e $t(\Gamma)$ o conjunto que resulta de substituir cada fórmula B de Γ por t. O sistema S_1 é *interpretável* em S_2 por *t com relação à derivabilidade* se, para cada conjunto $\Gamma \cup \{A\}$ de fórmulas em S_1, $\Gamma \vdash_{S_1} A$ se, e somente se, $t(\Gamma) \vdash_{S_2} t(A)$.

Definição 1.5.3. O sistema lógico S_1 é *interpretável esquematicamente* no sistema lógico S_2 por t se a tradução t é definida por esquemas de fórmulas de S_2.

Brown e Suszko (1973), interessados nas propriedades algébricas de lógicas abstratas de mesmo tipo de similaridade, constroem um quadro geral da teoria de lógicas abstratas. Os autores definem morfismo entre lógicas, que coincide com a atual definição de tradução entre sistemas lógicos. O trabalho é interessante, porém, os autores não estão preocupados com o estudo de inter-relações entre lógicas abstratas em geral e funções contínuas são definidas como generalizações das funções contínuas usuais entre espaços topológicos.

Szczerba (1977) assume que as linguagens de teorias de primeira ordem trabalham apenas com um tipo de variáveis, com um número finito de constantes não lógicas e que todas denotam símbolos de relação, assim as linguagens não possuem constantes individuais, nem símbolos funcionais. Entende-se assim, que uma *assinatura* de uma dada linguagem é uma sequência finita de números naturais. Foi definido um *código* entre duas assinaturas como uma determinada sequência. As definições a seguir são encontradas no artigo.

Definição 1.5.4. Funções que levam fórmulas em fórmulas são chamadas *traduções*.

Logo, qualquer função que leve fórmulas em fórmulas, inclusive as traduções já estudadas neste trabalho, são traduções segundo Szczerba.

A partir de um código c, uma tradução F_C é definida por indução de modo que a igualdade e os símbolos relacionais não aparecem na imagem de F_C.

Definição 1.5.5. Sejam T e T' duas teorias de primeira ordem com assinaturas σ e τ, respectivamente. A teoria T é *interpretável* na teoria T', $T \leq T'$ se $\exists c\, c \in \mathrm{Cod}_{\sigma,\tau} \wedge T' \subseteq \mathrm{Codom}\, F_C \wedge T = \dot{F}_C T'$, em que $\mathrm{Cod}_{\sigma,\tau}$ é o conjunto de códigos de σ em τ, Codom F_C é o contradomínio de F_C e $\dot{F}_C T'$ é o conjunto dos elementos A da imagem de F_C tais que $F_C(A)$ é um elemento de T'.

Apesar de sugerir uma definição para o conceito de tradução entre teorias, o interesse de Szczerba foi a respeito de traduções entre modelos.

O conceito de tradução aparece pela primeira vez em um livro em (Wójcicki 1988). Para Wójcicki, lógicas consistem de álgebras com operadores de consequência. Encontramos neste livro as seguintes definições.

Definição 1.5.6. Uma *linguagem proposicional* **L** é uma álgebra livre $(L, \mu_1, \ldots, \mu_2)$, em que L é o conjunto de todas as fórmulas de **L** e $\mu_1, \ldots, \mu_2$ são os conectivos de **L**.

Definição 1.5.7. Um *cálculo proposicional* é um par $(\mathbf{L}, \mathbf{C})$, em que **L** é uma linguagem proposicional e **C** é um operador de consequência Tarskiano sobre L.

Definição 1.5.8. Um cálculo proposicional $(\mathbf{L}, \mathbf{C})$ é um *cálculo lógico* se **C** é um operador estrutural sobre S, ou seja, se, para toda substituição s definida sobre fórmulas de L, $s\mathbf{C}(\Delta) = \mathbf{C}(s\Delta)$.

Foram definidas traduções entre linguagens proposicionais e entre cálculos lógicos.

Definição 1.5.9. Dadas duas linguagens proposicionais, $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$, com o mesmo conjunto de variáveis, uma função t de $\mathbf{L_1}$ em $\mathbf{L_2}$ é uma *tradução entre as linguagens* de $\mathbf{L_1}$ em $\mathbf{L_2}$ se, e somente se:

(i) existe uma fórmula $A(p_0)$ em $\mathbf{L_2}$ na variável p_0 tal que, para cada variável p, $t(p) = A(p)$;

(ii) para cada conectivo μ_i de $\mathbf{L_1}$ com aridade k, existe uma fórmula A_i em $\mathbf{L_2}$, nas variáveis $p_1, \ldots, p_k$, tal que $t(\mu i(B_1, \ldots, B_k)) = A_i(t(B_1/p_1), \ldots, t(B_k/p_k))$, para cada $B_1, \ldots, B_k$ em $\mathbf{L_1}$.

Foi apresentado o seguinte exemplo de tradução entre cálculos proposicionais, dado por uma função, £, do CPC no sistema proposicional trivalente de Łukasiewicz, $\mathbf{Ł_3}$ como abaixo.

$$\begin{aligned}
(p)^{£} &=_{\text{def}} p, \\
(A \to B)^{£} &=_{\text{def}} A \to (A \to B), \\
(\neg A)^{£} &=_{\text{def}} A \to (A \to \neg(A \to A)).
\end{aligned}$$

Definição 1.5.10. Dados dois cálculos lógicos $(\mathbf{L_1}, \mathbf{C_1})$ e $(\mathbf{L_2}, \mathbf{C_2})$, uma tradução entre os cálculos $(\mathbf{L_1}, \mathbf{C_1})$ e $(\mathbf{L_2}, \mathbf{C_2})$ é uma tradução t de $\mathbf{L_1}$ em $\mathbf{L_2}$ tal que, para todo $X \subseteq L_1$ e toda $A \in L_1$, $A \in \mathbf{C_1}(X)$ se, e somente se, $t(A) \in \mathbf{C_2}(t(X))$.

O livro trata de diversos assuntos e as definições e resultados a respeito de traduções aparecem apenas em seu primeiro capítulo, sem serem muito destacados.

Para Epstein (1990), uma *tradução* de uma sistema lógico proposicional $\mathbf{L_1}$ em um sistema lógico proposicional $\mathbf{L_2}$ é definida em termos semânticos como uma função t' da linguagem de $\mathbf{L_1}$ na linguagem de $\mathbf{L_2}$ tal que $\Gamma \models_{\mathbf{L_1}} A$ se, e somente se, $t(\Gamma) \models_{\mathbf{L_2}} t(A)$, para cada conjunto $\Gamma \cup \{A\}$ de fórmulas em $\mathbf{L_1}$, em que $t(\Gamma) = \{t(B) : B \in \Gamma\}$. As traduções são muito utilizadas pelo autor neste livro.

As interpretações de Kolmogorov, Glivenko e Gentzen são traduções de acordo com as definições de Prawitz e Malmnäs, Wójcicki e Epstein. As de Gödel são traduções apenas segundo Prawitz e Malmnäs.

1.6. O conceito de tradução dado por da Silva, D'Ottaviano e Sette

Motivados pelos trabalhos de D'Ottaviano (1973) e Hoppmann (1973), que foram desenvolvidos sob orientação do Prof. Dr. Mário Tourasse Teixeira, sobre o estudo de propriedades lógicas a partir de funções contínuas definidas entre conjuntos munidos com operadores de fecho, da Silva, D'Ottaviano e Sette (1999) propõem uma definição bem geral para o conceito de tradução entre lógicas. Os autores estavam interessados no estudo de inter-relações entre sistemas lógicos em geral. Exporemos abaixo as definições de lógica e tradução entre lógicas dadas pelos autores. Primeiramente daremos algumas definições usuais a respeito do operador de consequência de Tarski.

1.6.1 O operador de consequência, lógica e sistemas lógicos

Em seu artigo "Sobre alguns conceitos fundamentais da metamatemática" (Tarski 2001), Tarski apresenta um sistema lógico formado apenas por sentenças e pelo operador de consequência, o qual designa o conjunto de sentenças de um conjunto de sentenças dado.

Apresentaremos o conceito e resultados sobre o operador de consequência, ou fecho, segundo Feitosa (1997) e D'Ottaviano, Feitosa (2007), assim, todas as demonstrações podem ser encontradas nestes trabalhos. Esta versão não é tão exigente quanto a de Tarski. De acordo com Tarski cada sistema lógico deveria ser consistente e possuir domínio enumerável, mas atualmente estas condições não são relevantes pelo fato de que as lógicas paraconsistentes não adotam sistemas lógicos consistentes e existem diversos trabalhos em que encontramos linguagens não enumeráveis.

Definição 1.6.1. Seja X um conjunto não vazio, um operador de consequência, denotado por $\mathbf{C}$, sobre um conjunto X é uma função, definida no conjunto dos subconjuntos de X, $\mathbf{C} : \wp(X) \to \wp(X)$, tal que para todos $A, B \subseteq X$, valem:

(i) $A \subseteq \mathbf{C}(A)$,
(ii) Se $A \subseteq B$, então $\mathbf{C}(A) \subseteq \mathbf{C}(B)$,
(iii) $\mathbf{C}(\mathbf{C}(A)) \subseteq \mathbf{C}(A)$.

O item (i) da definição é conhecido por *axioma da autodedutibilidade*, ele diz que toda sentença de um determinado conjunto é consequência deste conjunto; (ii), comumente chamado *monotonicidade*, nos permite concluir que o operador de consequência é monotônico; (iii) nos remete que as consequências das consequências estão contidas nas consequências, ou seja, não podemos ampliar o conjunto das consequências aplicando novamente o operador de consequência. De (i) e (iii) segue que $\mathbf{C}(\mathbf{C}(A)) = \mathbf{C}(A)$.

Definição 1.6.2. O operador de consequência $\mathbf{C}$ sobre um conjunto X é *finitário* se, para todo $A \subseteq X$, temos que $\mathbf{C}(A) = \cup\{\mathbf{C}(A_i) : A_i$ é um subconjunto finito de $A\}$.

Proposição 1.6.3. *Sejam I um conjunto indexado e X um conjunto não vazio. Se, para todo $i \in I$, $A_i \subseteq X$, então:*

(i) $\mathbf{C}(\cap_{i\in I} A_i) \subseteq \cap_{i\in I}\mathbf{C}(A_i)$,
(ii) $\cup_{i\in I}\mathbf{C}(A_i) \subseteq \mathbf{C}(\cup_{i\in I} A_i)$,
(iii) $\mathbf{C}(\cap_{i\in I} A_i) = \mathbf{C}(\cap_{i\in I}\mathbf{C}(A_i))$,
(iv) $\mathbf{C}(\cup_{i\in I} A_i) = \mathbf{C}(\cup_{i\in I}\mathbf{C}(A_i))$.

Proposição 1.6.4. *Se $A, B \subseteq X$, então, para o operador de consequência* $\mathbf{C}$ *sobre X,* $\mathbf{C}(A \cup B) = \mathbf{C}(A \cup C(B))$.

Definição 1.6.5. Um subconjunto A de X é *fechado*, de acordo com o operador de consequência $\mathbf{C}$ sobre X, se $\mathbf{C}(A) = A$; e é *aberto* se o complemento de A, $A^{\mathbf{C}}$, é fechado. Um elemento $x \in X$ é *denso* em S quando $\mathbf{C}(\{x\}) = S$.

Definição 1.6.6. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}'$ dois operadores de consequência sobre X. O operador $\mathbf{C}$ é *mais forte* que o operador $\mathbf{C}'$ (ou $\mathbf{C}'$ é *mais fraco* que $\mathbf{C}$), $\mathbf{C}' \preccurlyeq \mathbf{C}$, se todo conjunto fechado de X segundo $\mathbf{C}$ também é um conjunto fechado segundo $\mathbf{C}'$.

Proposição 1.6.7. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{C}'$ *dois operadores de consequência sobre X. Então* $\mathbf{C}$ *é* mais forte *que o operador* $\mathbf{C}'$ *se, e somente se, para todo $A \subseteq X$,* $\mathbf{C}'(A) \subseteq \mathbf{C}(A)$.

Definição 1.6.8. Uma *lógica* $\mathbf{L}$ é um par $(L, \mathbf{C})$, em que L é um conjunto qualquer, o domínio de $\mathbf{L}$, e $\mathbf{C}$ é um operador de consequência sobre L.

Definição 1.6.9. A lógica $\mathbf{L_1} = (L_1, \mathbf{C_1})$ é uma *sub-lógica* da lógica $\mathbf{L_2} = (L_2, \mathbf{C_2})$, o que denotamos por $\mathbf{L_1} \subseteq \mathbf{L_2}$, se $L_1 \subseteq L_2$ e o operador $\mathbf{C_1}$ coincide com o operador $\mathbf{C_2}$ restrito a L_1, $\mathbf{C_1} = \mathbf{C_2}/L_1$.

Proposição 1.6.10. *Se a lógica* $\mathbf{L_1} = (L_1, \mathbf{C_1})$ *é uma* sub-lógica *da lógica* $\mathbf{L_2} = (L_2, \mathbf{C_2})$*, então, para todo $A \subseteq L_1$,* $\mathbf{C_1}(A) = \mathbf{C_2}(A) \cap L_1$.

Definição 1.6.11. Sejam $\mathbf{L} = (L, \mathbf{C})$ uma lógica e $A \subseteq X \subseteq L$. O *fecho restringido* de A a X é o conjunto $\mathbf{C}_X(A) = \{x : x \in \mathbf{C}(A) \cap X\}$.

Proposição 1.6.12. *Se X é um conjunto não-vazio e $\mathsf{C} \subseteq \wp(X)$, tal que $X \in \mathsf{C}$ e C é fechado para intersecções arbitrárias, então existe um único operador de consequência* $\mathbf{C}_X$ *definido em X de forma que os fechados de X são exatamente os elementos de C.*

O operador de consequência da proposição anterior é o seguinte conjunto $\mathbf{C}_{\mathsf{C}}(B) = \cap\{C \in \mathsf{C} : B \subseteq C\}$.

Definição 1.6.13. Sejam $(L, \mathbf{C})$ uma lógica e A, B conjuntos quaisquer. Dada uma função $f : L \to B$, $\mathbf{C}_B$ é o *operador de consequência co-induzido* por f e $(L, \mathbf{C})$ sobre B quando, para cada $C \subseteq B$, C é um conjunto fechado de B sempre que $f^{-1}(C)$ é um fechado de L. Dizemos que $(B, \mathbf{C}_B)$ é a *lógica* *co-induzida* por f e L. De forma dual, dada uma função $g : A \to L$, $\mathbf{C}_A$ é o *operador de consequência induzido* por g e $(L, \mathbf{C})$ sobre A quando, para cada $C \subseteq A$, C é um conjunto fechado de A sempre que existe um conjunto fechado D de L tal que $C = g^{-1}(D)$.

Definição 1.6.14. Seja L uma linguagem formal. Um *operador de consequência sobre a linguagem* L é um operador de consequência sobre o conjunto das fórmulas definidas sobre L.

Definição 1.6.15. Sejam L uma linguagem formal e $\mathbf{For}(L)$ a álgebra livre das fórmulas de L gerada pelo conjunto de variáveis proposicionais $\mathbf{Var}(L)$. Uma *substituição* em L é um endomorfismo s de $\mathbf{For}(L)$.

Definição 1.6.16. Sejam L uma linguagem formal, s uma substituição em L e $\mathbf{C}$ um operador de consequência sobre $\mathbf{For}(L)$. O operador de consequência $\mathbf{C}$ é *estrutural* quando, para cada $\Gamma \subseteq \mathbf{For}(L)$, $s(\mathbf{C}(\Gamma)) \subseteq \mathbf{C}(s(\Gamma))$. O operador de consequência $\mathbf{C}$ é *standard* quando é finitário e estrutural.

Definição 1.6.17. Um *sistema lógico* sobre uma linguagem formal L é um par $\mathcal{L} = (L, \mathbf{C})$, com $\mathbf{C}$ um operador de consequência estrutural na álgebra livre $\mathbf{For}(L)$ das fórmulas de L.

Denotamos o conjunto $\mathbf{For}(L)$ também por $\mathbf{For}(\mathcal{L})$, em que $\mathcal{L} = (L, \mathbf{C})$ é um sistema lógico. Para um sistema lógico $\mathcal{L}$, se $\Delta \cup \{A\} \subseteq \mathbf{For}(\mathcal{L})$, então o par (Δ, A), o qual escrevemos geralmente como $\Delta \vdash A$, é entendido como existe uma dedução de A a partir de Δ.

Definição 1.6.18. Uma dedução $\Delta \vdash A$ num sistema lógico $\mathcal{L}$ é *correta* para um operador de consequência $\mathbf{C}$ se, e somente se, $A \in \mathbf{C}(\Delta)$.

Uma dedução correta para $\mathbf{C}$ é denotada por $\Delta \vdash_C A$, assim temos uma nova forma de escrever $A \in \mathbf{C}(\Delta)$.

Definição 1.6.19. Sejam $\mathcal{L} = (L, \mathbf{C})$ um sistema lógico e $\Delta \subseteq \mathbf{For}(\mathcal{L})$. O conjunto Δ é uma teoria de $\mathcal{L}$ se Δ é fechado, segundo o operador $\mathbf{C}$.

Definição 1.6.20. Um *teorema de uma teoria* Δ de um sistema lógico $\mathcal{L}$ é um elemento de Δ. Um *teorema de um sistema lógico* $\mathcal{L}$ é um teorema de $C(\emptyset)$, ou seja, um teorema da menor teoria associada ao operador de consequência $\mathbf{C}$. Denotamos o conjunto teorema de $\mathcal{L}$ por $\mathbf{Teo}(\mathcal{L}) = \{A : A \in \mathbf{C}(\emptyset)\}$.

Definição 1.6.21. Um sistema lógico $\mathcal{L} = (L, \mathbf{C})$ é *vácuo* se $\mathbf{C}(\emptyset) = \emptyset$, ou seja, seu conjunto de teoremas é vazio.

Definição 1.6.22. Dado $\Delta \subseteq \mathbf{For}(\mathcal{L})$, Δ é um conjunto trivial se $\mathbf{C}(\Delta) = \mathbf{For}(\mathcal{L})$ e é não trivial caso contrário. Dado o sistema lógico $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ é um sistema lógico trivial se $\mathbf{C}(\emptyset) = \mathbf{For}(\mathcal{L})$.

Proposição 1.6.23. *Se $\Delta, \Gamma \subseteq \mathbf{For}(\mathcal{L})$, $\Delta \subseteq \Gamma$ e Δ é trivial, então Γ é trivial.*

Proposição 1.6.24. *Se $\Delta \subseteq \mathbf{For}(\mathcal{L})$ possui alguma fórmula densa, então Δ é um conjunto trivial.*

Definição 1.6.25. Dado um sistema lógico $\mathcal{L} = (L, \mathbf{C})$, cuja linguagem L possui tem um símbolo $\neg$ para a negação, um conjunto $\Delta \subseteq \mathbf{For}(\mathcal{L})$ é *inconsistente* se $A \in \mathbf{C}(\Delta)$ e $\neg A \in \mathbf{C}(\Delta)$, para alguma fórmula A em $\mathbf{For}(\mathcal{L})$ e o conjunto Δ é *consistente* caso contrário. O sistema lógico $\mathcal{L}$ é consistente se $\mathbf{Teo}(\mathcal{L})$ é consistente.

Definição 1.6.26. Sejam $\Delta, \Gamma \subseteq \mathbf{For}(\mathcal{L})$, Δ uma teoria e Γ um conjunto de fórmulas. Dizemos que a teoria Δ é *axiomatizável* por Γ se $\Gamma \subseteq \Delta$ e todo membro de Δ é consequência de Γ pelo operador de consequência $\mathbf{C}$ de $\mathcal{L}$. A teoria Δ é *finitamente axiomatizável* por algum conjunto com número finito de axiomas.

Tomemos o sistema lógico $\mathcal{L} = (L, \mathbf{C})$ e uma classe de estruturas, $\mathrm{Est}(\mathcal{L})$, associada a ele, definida por uma relação de satisfação $\models\ \subseteq \mathrm{Est}(\mathcal{L}) \times \mathbf{For}(\mathcal{L})$. Para cada par $(\mathcal{A}, A)$ desta relação, se $(\mathcal{A}, A) \in\ \models$, escrevemos $\mathcal{A} \models A$ e se $(\mathcal{A}, A) \notin\ \models$, escrevemos $\mathcal{A} \not\models A$.

Definição 1.6.27. A *classe dos modelos* de $\Delta \subseteq \mathbf{For}(\mathcal{L})$ é definida por $\mathrm{Mod}(\Delta) =_{\mathrm{def}} \{\mathcal{A} \in \mathrm{Est}(\mathcal{L}) : \mathcal{A} \models A$, para toda $A \in \Delta\}$. Dado $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Est}(\mathcal{L})$, a *teoria de $\mathcal{B}$* é definida por $T(\mathcal{B}) =_{\mathrm{def}} \{B \in \mathbf{For}(L) : \mathcal{A} \models B$, para toda $\mathcal{A} \in \mathcal{B}\}$.

Proposição 1.6.28. *Seja $\Delta \subseteq \mathbf{For}(\mathcal{L})$, a função $T(Mod(\Delta))$ é um operador de consequência.*

Definição 1.6.29. Dado um sistema lógico $\mathcal{L} = (L, \mathbf{C})$, $\mathcal{L}$ é *correto* se $\mathbf{C}(\emptyset) \subseteq T(\mathrm{Mod}(\emptyset))$; $\mathcal{L}$ é *completo* se $T(\mathrm{Mod}(\emptyset)) \subseteq \mathbf{C}(\emptyset)$; $\mathcal{L}$ é *adequado* se é correto e completo, ou seja, $\mathbf{C}(\emptyset) = T(\mathrm{Mod}(\emptyset))$; $\mathcal{L}$ é *fortemente adequado* se, para todo $\Delta \subseteq \mathbf{For}(\mathcal{L})$, $\mathbf{C}(\Delta) = T(\mathrm{Mod}(\Delta))$.

Denotamos que todo modelo Δ é também modelo de A por $\Delta \models A$, para $\Delta \cup \{A\} \subseteq \mathbf{For}(\mathcal{L})$ e $\mathcal{L}$ um sistema lógico. Convencionamos que $\Delta \models A$ é o mesmo que $A \in T(\text{Mod}(\Delta))$.

Esta subseção é importante, pois o conceito de tradução a seguir e o conceito de tradução conservativa, um dos principais objetos de estudo deste trabalho, utilizam a definição de lógica dada através do operador de consequência.

1.6.2 O conceito de tradução

A tradução definida nesta subseção é dada por da Silva, D'Ottaviano e Sette (1999).

Definição 1.6.30. Uma *tradução* de uma lógica $\mathbf{L_1} = (L_1, \mathbf{C_1})$ em uma lógica $\mathbf{L_2} = (L_2, \mathbf{C_2})$ é uma função $t : L_1 \to L_2$ tal que, para todo $X \cup \{x\} \subseteq L_1$, se $x \in \mathbf{C_1}(X)$, então $t(x) \in \mathbf{C_2}(t(X))$, em que $t(X) = \{t(y) : y \in X\}$.

Particularmente, quando as lógicas da definição anterior são sistemas lógicos, temos que uma *tradução* de um sistema lógico $\mathcal{L}_1$ em um sistema lógico $\mathcal{L}_2$ é uma função $t : \text{For}(L_1) \to \text{For}(L_2)$ tal que, para todo $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \text{For}(L_1)$, se $\Gamma \vdash_{C_1} A$, então $t(\Gamma) \vdash_{C_2} t(A)$. Quando $\Gamma = \emptyset$, como $t(\emptyset) = \emptyset$, podemos concluir que uma tradução leva teoremas de $\mathcal{L}_1$ em teoremas de $\mathcal{L}_2$.

Uma tradução $t : L_1 \to L_2$ também é denotada por $t : \mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$.

Como podemos perceber, a definição pretende preservar a derivabilidade. Isto se deve ao fato que lógicas são caracterizadas como pares formados por um conjunto (ignorando que em geral uma lógica lida com fórmulas de uma linguagem) e um operador de consequência e as traduções entre lógicas são definidas como funções que preservam relações de consequência.

Proposição 1.6.31. *A função $t : \mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$ é uma tradução se, e somente se, $t(\mathbf{C_1}(A)) \subseteq \mathbf{C_2}(t(A))$, para todo $A \subseteq L_1$.*

Definição 1.6.32. Duas lógicas $\mathbf{L_1} = (L_1, \mathbf{C_1})$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, \mathbf{C_2})$ são *L-homeomorfas* se existe uma função bijetiva $t : \mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$ tal que t e t^{-1} são traduções. A função t é chamada um *L-homeomorfismo*.

Proposição 1.6.33. *Uma bijeção $t : \mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$ é um L-homeomorfismo se, e somente se, $t(\mathbf{C_1}(A)) \subseteq \mathbf{C_2}(t(A))$, para todo $A \subseteq L_1$.*

Encontramos, ainda em (da Silva, D'Ottaviano, Sette, 1999), um tratamento inicial de uma teoria de traduções entre lógicas; estudo de algumas conexões entre traduções entre lógicas e funções uniformemente contínuas entre os espaços de suas teorias; e uma demonstração de que a classe constituída por lógicas (objetos) e traduções entre lógicas (morfismos) é uma categoria bi-completa.

Pesquisas foram realizadas utilizando este conceito de tradução, por exemplo, Carnielli (1990) propôs uma nova abordagem a semânticas formais para lógicas não-clássicas usando traduções, denominadas *semânticas de traduções possíveis*; as traduções também são essenciais para a *semântica algébrica de traduções possíveis* introduzidas por Bueno-Soler (2004). Fernández (2005) utiliza traduções para investigar combinações de lógicas, mais especificamente decomposição de lógicas. Queiroz (1997) apresenta uma definição de dualidade entre lógicas a partir do conceito de traduções.

O entendimento de importantes conceitos de traduções entre lógicas, particularizações da definição dada acima, é crucial para o entendimento das traduções conservativas e das traduções contextuais tratadas a seguir.

2. Traduções conservativas e contextuais

2.1. Traduções conservativas

As traduções conservativas, estudadas por Feitosa (1997), constituem uma classe especial de traduções entre lógicas definidas como em (da Silva, D'Ottaviano, Sette 1999) e são investigadas em (D'Ottaviano, Feitosa 1999) e (Feitosa, D'Ottaviano 2001).

Definição 2.1.1. Sejam $\mathbf{L_1} = (L_1, \mathbf{C_1})$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, \mathbf{C_2})$ duas lógicas. Uma *aplicação conservativa* de $\mathbf{L_1}$ em $\mathbf{L_2}$ é uma função $t : L_1 \to L_2$ tal que, para todo conjunto $x \in L_1$, temos que $x \in \mathbf{C_1}(\emptyset)$ se, e somente se, $t(x) \in \mathbf{C_2}(\emptyset)$.

Definição 2.1.2. Sejam $\mathbf{L_1} = (L_1, \mathbf{C_1})$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, \mathbf{C_2})$ duas lógicas. Uma *tradução conservativa* de $\mathbf{L_1}$ em $\mathbf{L_2}$ é uma função $t : L_1 \to L_2$ tal que, para todo conjunto $X \cup \{x\} \subseteq L_1$, temos que $x \in \mathbf{C_1}(X)$ se, e somente se, $t(x) \in \mathbf{C_2}(t(X))$.

Percebemos que traduções conservativas são traduções em que vale a volta da condição para que a função t seja uma tradução. Quando $\mathbf{L_1}$ e

$\mathbf{L_2}$ são sistemas lógicos $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, uma *tradução conservativa* de $\mathcal{L}_1$ em $\mathcal{L}_2$ é uma função $t : \text{For}(L_1) \to \text{For}(L_2)$ tal que, para todo subconjunto $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \text{For}(L_1)$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{C_1}} A$ se, e somente se, $t(\Gamma) \vdash_{\mathbf{C_2}} t(A)$. Assim como para as traduções, ao invés de $t : L_1 \to L_2$ podemos escrever $t : \mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$.

São exemplos de traduções conservativas: traduções no sentido de Wójciki, as traduções de Epstein e as traduções de Kolmogorov, Glivenko e Gentzen, do CPC no CPI.

Alguns exemplos aparentemente intuitivos, como a função identidade da lógica intuicionista na lógica clássica, $i : CPI \to CPC$, e a função esquecimento das lógicas modais na lógica clássica são traduções de acordo com a definição de da Silva, D'Ottaviano e Sette (1999), no entanto, não são traduções conservativas. Basta observarmos que $p \vee \neg p \notin \mathbf{C}_{CPI}(\emptyset)$ e $i(p \vee \neg p) = p \vee \neg p \in \mathbf{C}_{CPC}(\emptyset)$; o mesmo ocorre com a função esquecimento de uma lógica modal, em que a fórmula $\Box p \to p$ não é derivada no CPC.

Os resultados mencionados acima são fruto dos trabalhos de Feitosa e D'Ottaviano em diversos artigos (1997, 1999a, 2001 e 2007). A seguir, salientamos alguns resultados.

Proposição 2.1.3. *Uma tradução $t : \mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$ é conservativa se, e somente se, para todo $A \subseteq L_1$, $t^{-1}(\mathbf{C_2}(t(A))) \subseteq \mathbf{C_1}(A)$.*

Teorema 2.1.4. *Se existe uma tradução conservativa recursiva de um sistema lógico $\mathcal{L}_1 = (L_1, \mathbf{C_1})$ em um sistema lógico decidível $\mathcal{L}_2 = (L_2, \mathbf{C_2})$, então $\mathcal{L}_1$ também é decidível.*

Corolário 2.1.5. *Não existe uma tradução conservativa da lógica de primeira ordem no CPC.*

Proposição 2.1.6. *Seja $\mathcal{L}_1 = (L_1, \mathbf{C_1})$ um sistema lógico com uma axiomática Ω. Se existe uma tradução conservativa sobrejetiva t de $\mathcal{L}_1$ em $\mathcal{L}_2$, então $t(\Omega)$ é uma axiomática para $\mathcal{L}_2$.*

Proposição 2.1.7. *Se $\mathcal{L}_1$ é um sistema lógico não trivial e t é uma aplicação conservativa de $\mathcal{L}_1$ num sistema lógico $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_2$ então é não trivial.*

Definição 2.1.8. Sejam L_1 e L_2 duas linguagens, $p_0, p_1, \ldots$ as fórmulas atômicas de L_1. Se L_1 é uma linguagem contendo apenas conectivos unários e binários, então diz-se que $* : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_2$ é uma *função esquemática* se existe esquemas de fórmulas $A, B_\#, C_\Xi$ de L_2 tais que:

(i) $p^* = A(p)$, para cada fórmula atômica de L_1.
(ii) $(\#D)^* = B_\#(D^*)$, para cada conectivo unário # de L1.
(iii) $(D \,\Xi\, E)^* = C_\Xi(D^*, E^*)$, para cada conectivo binário Ξ de L_1.

Uma tradução *t* entre sistemas lógicos é esquemática se ela é uma função esquemática.

Definição 2.1.9. Diz-se que uma função $* : L_1 \to L_2$ é *relativamente literal* a um dado conectivo unário #, ou binário Ξ, se é esquemática e temos que $(\#A)^* = \#A^*$, ou $(A \,\Xi\, B)^* = A^* \,\Xi\, B^*$.

Definição 2.1.10. Diz-se que uma função $* : L_1 \to L_2$ é *literal* se é relativamente literal para cada conectivo de L1.

Uma tradução *t* entre sistemas lógicos é literal se ela é uma função literal.

Proposição 2.1.11. *Sejam os sistemas lógicos $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, construídos sobre linguagens nas quais o símbolo de condicional ocorra como primitivo ou possa ser definido. Se $t : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ é uma tradução conservativa e literal para o símbolo condicional e $\mathcal{L}_1$ admite um Teorema da Dedução, então a imagem de t também admite.*

O resultado acima nos dá condições para a preservação de Meta-Teoremas de Dedução no contexto de implicações dedutivas. Se a tradução *t* da proposição acima é sobrejetiva, então $\mathcal{L}_2$ admite um Teorema da Dedução.

Definição 2.1.12. Seja $\mathbf{L} = (L, \mathbf{C})$ uma lógica e $\sim$ uma relação de equivalência em L. A função $Q : L \to L/\sim$, dada por $Q(x) = [x] = \{y : x \sim y\}$, é dita a *função quociente* para a relação $\sim$ sobre L. Se $\mathbf{C}_\sim$ é o operador de consequência co-induzido por Q e L, então o par $\mathbf{L}_\sim = (L/\sim, \mathbf{C}_\sim)$ é a lógica co-induzida por $\mathbf{L}$ e Q.

Definição 2.1.13. Sejam A e B conjuntos. Dizemos que $f : A \to B$ é *compatível* com a relação de equivalência $\sim$ sobre A sempre que $x_1 \sim x_2$ implica $f(x_1) = f(x_2)$.

O teorema a seguir pode ser encontrado em (Feitosa 1997) e (Feitosa, D'Ottaviano, 2001) e nos dá uma condição necessária e suficiente para a existência de tradução conservativa entre duas lógicas. Ele foi utilizado na obtenção de muitas traduções conservativas dadas por D'Ottaviano e Feitosa.

Teorema 2.1.14. *Dadas as lógicas* $\mathbf{L_1} = (L_1, \mathbf{C_1})$ *e* $\mathbf{L_2} = (L_2, \mathbf{C_2})$*, com* L_2 *enumerável; e* $\mathbf{L}_{1\sim_1}$ $\mathbf{L}_{2\sim_2}$ *as lógicas co-induzidas por* Q_1*,* L_1 *e* Q_2*,* L_2*, respectivamente, com* $\sim_1$ *e* $\sim_2$ *relações de equivalência definidas de acordo com definições prévias sobre* L_1 *e* L_2*, respectivamente. Nestas condições existe uma tradução conservativa* $t : L_1 \to L_2$ *se, e somente se, existe uma tradução conservativa* $t^* : L_1/\sim_1 \to L_2/\sim_2$*.*

Muitos resultados envolvendo traduções conservativas foram obtidos, entre eles:

- Diversas traduções conservativas envolvendo a lógica clássica e as lógicas polivalentes de Łukasiewicz e Post foram introduzidas por D'Ottaviano e Feitosa (1999b).
- Traduções conservativas envolvendo a lógica clássica, a lógica trivalente $\mathbf{Ł_3}$ de Łukasiewicz, o sistema intuicionista $\mathbf{I^1}$ de Sette e Carnielli (1995) e lógicas paraconsistentes da literatura (o sistema $\mathbf{P^1}$ de Sette, o sistema $\mathbf{J^3}$ de D'Ottaviano e da Costa e os sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa) foram introduzidas por D'Ottaviano e Feitosa (2000).
- D'Ottaviano e Feitosa (2006) apresentam uma prova não-construtiva da existência de traduções conservativas das lógicas finito-valentes de Łukasiewicz no CPC utilizando as semânticas algébricas associadas a essas lógicas encontradas em (Cignoli, D'Ottaviano, Mundici, 2000). Este trabalho é importante visto que traduções para o CPC são difíceis de obter e, segundo Epstein (1990), não existem sob certas condições.
- Feitosa (1997) estudou o problema da existência de traduções conservativas do CPI no CPC. Uma prova não-construtiva da existência de tal tradução foi apresentada por D'Ottaviano no "II Congresso n Universal Logic (UNILOG'07)", em 2007, na China, e na "Conference on Residuated Structures: Algebra and Logic", em 2008, em Buenos Aires.
- Feitosa e D'Ottaviano (2001) demonstraram que a classe formada por lógicas e traduções conservativas entre elas determina uma subcategoria co-completa da categoria bi-completa constituída por lógicas e traduções entre lógicas.

- Scheer (2002) e Scheer e D'Ottaviano (2005) demonstraram que a categoria formada pelas lógicas Tarskianas e traduções é uma subcategoria plena da categoria formada pelas lógicas não-monotônicas e traduções. Ademais, provam que não existe tradução conservativa de uma lógica não-monotônica cumulativa em uma lógica Tarskiana e nem tradução conservativa sobrejetiva de uma lógica Tarskiana em uma lógica cumulativa não-monotônica.
- Jeřábek (2012) estudou as traduções conservativas e demonstrou que toda relação de consequência finitária sobre um conjunto enumerável de fórmulas pode ser traduzido conservativamente no CPC. De acordo com o autor, ampliando este resultado, existe uma tradução conservativa entre praticamente quaisquer dois sistemas dedutivos razoáveis e a existência de uma tradução entre duas lógicas não fornece informações úteis, seriam necessários, então, critérios mais refinados para definir tradução.

2.2. Traduções contextuais

Coniglio e Carnielli (2002) introduziram os conceitos de *transfer* e *transfer elementar* entre lógicas abstratas sobre linguagens bi-sortidas de primeira ordem, que podemos considerar como uma dimensão modelo-teorética para traduções. Lógicas são vistas como estruturas de primeira ordem especiais e podemos comparar traduções com as noções de isomorfismo e equivalência elementar, como vemos em (Coniglio 2005).

Em (Coniglio 2005) encontramos o conceito de *meta-traduções*, que são funções entre linguagens que preservam certas propriedades da lógica domínio. No "II World Congress on Universal Logic" (UNILOG'07), Carnielli, Coniglio e D'Ottaviano (2007) introduziram uma versão simplificada do conceito de meta-tradução, denominado *tradução contextual*. Os autores analisam este novo conceito e apresentam alguns exemplos a fim de inter-relacioná-lo com os conceitos de tradução conservativa e transfer.

Definição 2.2.1. Sejam $\chi = \{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto de variáveis de conjuntos, $\Sigma = \{\xi_i : i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto de esquemas de variáveis e $V = \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto de variáveis proposicionais. Uma *assinatura proposicional* é um conjunto $C = \{C_i : i \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos, tal que $V \subseteq C_0$. Os elementos de

C_n são os conectivos de aridade n.

Definição 2.2.2. Sejam $L(C, \Sigma)$ e $L(C)$ as C-álgebras livremente geradas por $C_0 \cup \Sigma$ e C_0, respectivamente. Uma asserção sobre C é um par (Υ, φ), denotada por $\Upsilon \vdash \varphi$, tal que Υ é um subconjunto de $\chi \cup L(C, \Sigma)$ e $\varphi \in L(C, \Sigma)$. Uma *meta-propriedade* sobre C é um par $(\{S_1, \ldots, S_n\}, S)$ tal que $S_i (i = 1, \ldots, n)$ e S são asserções sobre C.

Se $f : L(C, \Sigma) \to L(C', \Sigma)$ é uma função tal que para cada $\xi \in \Sigma$, $f(\xi) = \xi$ e $S = (\Upsilon, \varphi)$ é uma asserção sobre C, então $\dot{f}(S)$ é a asserção $(\dot{f}[\Upsilon], \dot{f}(\varphi))$ sobre C' tal que $\dot{f}(\psi) = f(\psi)$ se $\psi \subseteq L(C, \Sigma)$, $\dot{f}(X) = X$ se $X \in \chi$ e $\dot{f}[\Upsilon] = \{\dot{f}(a) : a \in \Upsilon\}$. Se $(P) = (\{S_1, \ldots, S_n\}, S)$ é uma meta-propriedade sobre C, então $\dot{f}(P)$ é a meta-propriedade $(\{\dot{f}(S_1), \ldots, \dot{f}(S_n)\}, \dot{f}(S))$ sobre C'.

Definição 2.2.3. Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ lógicas definidas sobre assinaturas C e C', respectivamente. Uma *tradução contextual* f de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{L}'$, denotada por $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, é uma função $f : L(C, \Sigma) \to L(C', \Sigma)$ tal que $\mathcal{L}'$ satisfaz a meta-propriedade $\dot{f}(P)$, se $\mathcal{L}$ satisfaz a meta-propriedade (P). $\mathcal{L}$ é denominada contextualmente tradutível em $\mathcal{L}'$ se existe uma tradução contextual de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{L}'$.

Traduções contextuais são casos particulares de tradução, segundo (da Silva, D'Ottaviano, Sette, 1999); uma lógica trivial não é contextualmente tradutível em uma lógica não-trivial; e uma lógica monotônica não é contextualmente tradutível em uma lógica não-monotônica.

Considerações finais

Os estudos acima descritos fazem parte da pesquisa inicial de nossa tese de doutorado. Vimos que muito já foi desenvolvido em relação ao conceito de tradução e defendemos que ainda há muito o que ser estudado. Como trabalhos futuros pretendemos aprofundar o estudo das traduções contextuais: obter uma condição necessária e suficiente que caracterize as traduções contextuais e as traduções conservativas contextuais; analisar quão expressivas são estas traduções; e investigar uma possível categoria cujos objetos sejam as lógicas Tarskianas (ou as lógicas não-monotônicas) e cujos morfismos sejam as traduções contextuais. Pretendemos também estabelecer uma relação entre esta categoria e a categoria, já existente, em que os objetos são as lógicas Tarskianas e os morfismos são traduções segundo (da Silva, D'Ottaviano, Sette, 1999).

Ademais, compararemos as traduções contextuais com as traduções conservativas a fim de discutir quais são as vantagens e desvantagens de cada uma destas abordagens, considerando, inclusive, o caso das linguagens naturais.

Quanto ao recente artigo de Jeřábek (2012), procuraremos analisar seus possíveis impactos sobre o conceito de traduções conservativas.

Apoio

Este trabalho foi realizado com apoio financeiro da FAPESP.

Referências

Brown, D. J., Suszko, R. Abstract logics. 1973. *Dissertationes Mathematicae* **102**: 9–41.

Bueno-Soler, J. 2004. *Semântica algébrica de traduções possíveis*. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Carnielli, W. A. 1990. Many-valued logics and plausible reasoning. In: *Proceedings of the 20th International Congress on Many-Valued Logics*, IEEE Computer Society, Universidade de Charlotte, Carolina do Norte, EUA, p.328–35.

Carnielli, W. A., Coniglio, M. E., D'Ottaviano, I. M. L. 2007. New dimensions on translations between logics. In: *Proceedings of the II World Congress on Universal Logic*, Xi'an: UNILOG'07, p.44–54.

Cignoli, R. L. O., D'Ottaviano, I. M. L., Mundici, D. 2000. Algebraic foundations of many-valued reasoning. *Trends in Logic*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., v. 2.

Coniglio, M. E. 2005. Towards a stronger notion of translation between logics. *Manuscrito - Revista Internacional de Filosofia* **28**(2): 231–62.

Coniglio, M. E., Carnielli, W. A. 2002. Transfers between logics and their applications. *Studia Logica* **72**(3): 367–400.

D'Ottaviano, I. M. L. 1973. *Fechos caracterizados por interpretações*. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

D'Ottaviano, I. M. L., Feitosa, H. A. 1999a. Conservative translations and model-theoretic translations. *Manuscrito* **XXII**(2): 117–32.

———. 1999b. Many-valued logics and translations. In: Carnielli, W. A. (ed.) Multi-valued logics. *Journal of Applied Non-Classical Logics* **9**(1): 121–40.

———. 2000. Paraconsistent logics and translations. *Synthèse* **125**(1-2): 77-95.

———. Translations from Łukasiewicz logics into classical logic: is it possible? Essays in Logic and Antology. 2006. In: Malinowski, J., Pietruszcak, A. *Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities*, Torun, v.91, p.157–68.

———. Deductive systems and translations. 2007. In: Béziau, J-Y., Costa-Leite, A. (eds.) *Perspectives on Universal Logic*. Italy: Polimetrica S. a. s., p.125–57.

Da Silva, J. J., D'Ottaviano, I. M. L., Sette, A. M. 1999. Translations between logics. In: Caicedo, X., Montenegro, C. H. (ed.) *Models, algebras and proofs*. New York: Marcel Dekker, p.435–48.

Epstein, R. L. 1990. *The semantic foundations of logic*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, v.1.

Feitosa, H. A. 1997. *Traduções conservativas*. Tese de douturado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Feitosa, H. A., D'Ottaviano, I. M. L. 2001. Conservative translations. *Annals of Pure and Applied Logic*, Amsterdam, **108**: 205–27.

Fernández, V. L. 2005. *Fibrilação de lógicas na hierarquia de Leibniz*. Tese de douturado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Gentzen, G. 1969. On the relation between intuitionist and classical arithmetic (1933). In: Szabo, M. E. (ed.) *The collected papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North-Holland, p.53–67.

Glivenko, V. 1929. Sur quelques points de la logique de M. Brouwer. Académie Royale de Belgique, *Bulletins de la Classe de Sciences*, s. 5, **15**: 183–88.

Gödel, K. 1981. Sobre la teoría de números y la aritmética intuicionista (1933). In: Mosterín, J. (ed.) *Obras completas*. Madrid: Alianza Editorial, p.120–26.

———. 1986. An interpretation of the intuitionistic propositional calculus (1933). In: Feferman, S. et alii (eds.) *Collected works*. Oxford: Oxford University Press, p.301–3.

Herbrand, J. 1931. Sur la non-contradiction de l'arithmétique. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **166**: 1–8.

Hilbert, D. 1923. Die logischen Grundlagen der Mathematik. *Mathematische Annalen* **88**: 151–65.

Hoppmann, A. G. 1973. *Fecho e imersão*. Tese de doutorado. Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Jeřábek, E.2012. The ubiquity of conservative translations. *The Review of Symblic Logic* **?**: 1–13.

Johansson, I. 1936. Der Minimalkalkiil, ein reduzierter intutionistischer Formalismus. *Compositio Mathematicae* **4**: 119–36.

Kolmogorov, A. N. 1977. On the principle of excluded middle (1925). In: Heijenoort, J. (ed.) *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, p.414–37.

McKinsey, J. C. C., Tarski, A. 1948. Some theorems about the sentencial calculi of Lewis and Heyting. *The Journal of Symbolic Logic* **13**(1): 1–15.

Prawitz, D., Malmnäs, P. E. 1968. A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic. In: Schmidt, H. et alii. (eds.) *Contributions to mathematical logic*. Amsterdam: North-Holland, p.215–29.

Queiroz, G. S. 1997. *Sobre a dualidade entre intuicionismo e paraconsistência*. Tese de douturado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1953. Algebraic treatment of the notion of satisfiability. *Fundamenta Mathematicae* **40**: 62–95.

Scheer, M. C. 2002. *Para uma teoria de traduções entre lógicas cumulativas*. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Scheer, M. C., D'Ottaviano, I. M. L. 2005. Operadores de consequência cumulativos e traduções entre lógicas cumulativas. *Revista Informação e Cognição* **4**: 47–60.

Sette, A. M. Carnielli, W. A. 1995. Maximal intuitionistic logics. *Studia Lógica* **55**: 181–203.

Szczerba, L. 1977. Interpretability of elementary theories. In: Butts, H.; Hintikka, J. (eds.) *Logic, foundations of mathematics and computability theory*. D. Reidel, p.129–45.

Tarski, A. 2001. Sobre alguns conceitos fundamentais da metamatemática. Tradução de P. D. N. Velasco e E. G. Souza. *Princípios: revista de filosofia*, UFRN, Natal, **8**(10): 187–209.

Wojcicki, R. 1988. Theory of logical calculi: basic theory of consequence operations. Dordrecht: Kluwer Academic Press (Synthese Library, v. 199).

4

Uma Lógica dos Insuficientes: sistema axiomático, correção e completude

Kleidson Êglicio Carvalho da Silva Oliveira

1. Noções preliminares

Em sua tese de doutorado, Grácio (1999) apresentou uma família de lógicas — lógicas moduladas — cuja função é formalizar sentenças que expressam quantificações da linguagem natural, que não podem ser definidas em função dos quantificadores da lógica clássica de primeira ordem.

Seja $\mathcal{L}$ a lógica clássica de primeira ordem e Q um novo quantificador usado para estendê-la. $\mathcal{L}(Q)$ denota, portanto, a lógica clássica de primeira ordem estendida pelo quantificador Q. Quando Q possui as propriedades abaixo, ele é chamado quantificador modulado.

Em Grácio (1999), os axiomas de $\mathcal{L}(Q)$ são os mesmos de $\mathcal{L}$ incluindo os axiomas da identidade, adicionados dos seguintes axiomas para o quantificador Q:

(Ax1) $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Qx(\varphi(x)) \leftrightarrow Qx(\psi(x)))$;

(Ax2) $Qx\,(\varphi(x)) \rightarrow Qy\,(\varphi(y))$, se y é livre para x em φ (x);

(Ax3) $Qx\,(\varphi(x)) \rightarrow \exists x(\varphi(x))$;

(Ax4) $\forall x\varphi(x) \rightarrow Qx\,\varphi(x)$.

Todos esses axiomas estão presentes nas lógicas: dos ultrafiltros, do muito, do plausível e da maioria.

Dentre as lógicas moduladas, destacamos a lógica do plausível, que formaliza expressões do tipo "uma 'boa' parte dos S são P" ou "há suficientes S que são P". A noção de "uma 'boa' parte" traduzida pode ser vista na estrutura denominada de *topologia reduzida*.

Mortari, C. A. (org.) *Tópicos de lógicas não clássicas*.
Florianópolis: NEL/UFSC, 2014, pp. 112–124.

Formalmente, definimos uma *topologia reduzida* como uma família $\Im$ de subconjuntos de um conjunto X, chamados os *subconjuntos abertos reduzidos* (segundo a topologia reduzida $\Im$), que satisfaça as condições seguintes:

i) a interseção de dois subconjuntos abertos reduzidos quaisquer é um subconjunto aberto reduzido;
ii) a reunião de dois abertos reduzidos quaisquer é um subconjunto aberto reduzido;
iii) X é um subconjunto aberto reduzido;
iv) o subconjunto $\emptyset$ não é um aberto reduzido.

As noções de *espaço topológico reduzido* e *subconjuntos fechados reduzidos* são definidas de modo análogo àquelas apresentadas para a topologia usual.

Para a criação da lógica do plausível, introduziu-se um novo quantificador generalizado P, na linguagem usual da lógica clássica de primeira ordem dado por

$$Px\varphi(x)$$

significando a proposição "há suficientes x, tais que, $\varphi(x)$".

Se $\mathcal{L}$ é a lógica de primeira ordem com identidade, a lógica do plausível $\mathcal{L}(P)$ é construída do seguinte modo:

Os axiomas de $\mathcal{L}(P)$ são os axiomas de $\mathcal{L}$ acrescidos dos seguintes axiomas do quantificador P:

(Ax1) $(Px\,\varphi(x) \wedge Px\,\psi(x)) \to Px\,(\varphi(x) \wedge \psi(x))$;
(Ax2) $Px\,\varphi(x) \wedge Px\,\psi(x) \to Px\,(\varphi(x) \vee \psi(x))$;
(Ax3) $\forall x\varphi(x) \to Px\,\varphi(x)$;
(Ax4) $Px\,\varphi(x) \to \exists x\varphi(x)$;
(Ax5) $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to (Px(\varphi(x)) \leftrightarrow Px(\psi(x)))$;
(Ax6) $Px(\varphi(x)) \to Py\,(\varphi(y))$, se y é livre para x em $\varphi(x)$.

Dado as fórmulas φ e ψ, com exatamente uma variável livre, de um universo A, temos que para os conjuntos $[\varphi] = \{a \in A : \varphi[a]\}$ e $[\psi] = \{a \in A : \psi(a)\}$, os axiomas (Ax1) a (Ax5), intuitivamente, afirmam que:

(Ax1) se $[\varphi]$ e $[\psi]$ contêm uma 'boa' parte dos indivíduos, então a conjunção de $[\varphi]$ e $[\psi]$ também contém uma 'boa' parte dos indivíduos;

(Ax2) se $[\varphi]$ e $[\psi]$ contêm uma 'boa' parte dos indivíduos, então a disjunção de $[\varphi]$ e $[\psi]$ também contém uma 'boa' parte dos indivíduos;

(Ax3) Se $[\varphi]$ contém todos os indivíduos do universo, então uma 'boa' parte dos indivíduos pertence a $[\varphi]$;

(Ax4) se $[\varphi]$ contém uma 'boa' parte dos indivíduos, então $[\varphi]$ não é vazio;

(Ax5) se $[\varphi]$ e $[\psi]$ contêm os mesmos indivíduos, então $[\varphi]$ contém uma 'boa' parte dos indivíduos se, e somente se, $[\psi]$ também contém 'boa' parte dos indivíduos.

Com base nas definições de lógica modulada e principalmente na lógica do muito de Grácio (1999), criamos uma lógica para traduzir a noção intuitiva de poucos, denominada lógica do poucos que nos levou a acreditar que todas as lógicas moduladas poderiam ter lógicas que as complementassem, assim, este novo sistema, chamado de *lógicas paramoduladas*, tem como base os seguintes axiomas:

Seja $\mathcal{L}$ a lógica de primeira ordem com identidade, pode-se estender $\mathcal{L}$ com um novo quantificador D. Denotada esta extensão por $\mathcal{L}(D)$, além dos axiomas da lógica clássica de primeira ordem, com a igualdade, esta família de lógicas apresentaria os seguintes axiomas para o quantificador D:

(Ax1) $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Dx\varphi(x) \leftrightarrow Dx\psi(x))$;

(Ax2) $Dx\varphi(x) \rightarrow Dy\varphi(y)$, quando y é livre para x em $\varphi(x)$;

(Ax3) $Dx\varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$;

(Ax4) $Dx\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x\varphi(x)$.

A primeira lógica paramodulada apresentada foi a lógica do poucos, que tenta traduzir a noção usual de poucos da linguagem natural, para isso, acrescenta-se um novo quantificador K à linguagem da lógica clássica primeira ordem, utilizando uma estrutura denominada *estrutura do poucos* e denotando $\mathcal{L}(K)$ como a lógica clássica de primeira ordem estendida pelo quantificador K, dotando-o dos seguintes axiomas:

Os axiomas de $\mathcal{L}(K)$ são todos os axiomas de $\mathcal{L}$, incluindo os axiomas da identidade, acrescidos dos seguintes axiomas para o quantificador K:

(Ax1) $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Kx\varphi(x) \leftrightarrow Kx\psi(x))$

(Ax2) $Kx\varphi(x) \rightarrow Ky\varphi(y)$, quando y é livre para x em $\varphi(x)$

(Ax3) $Kx\varphi(x) \to \exists x\varphi(x)$

(Ax4) $Kx\varphi(x) \to \neg\forall x\varphi(x)$

(Ax5) $(\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \wedge \exists x\varphi(x)) \to (Kx\psi(x) \to Kx\varphi(x))$.

Os dois primeiros axiomas são necessários para a proposta de para que esta seja uma lógica paramodulada. Os axiomas Ax3, Ax4 e Ax5 são específicos para a lógica do poucos, e possuem as seguintes caracterizações intuitivas:

(Ax3) Se poucos indivíduos satisfazem uma sentença φ, então existem indivíduos que satisfazem φ.

(Ax4) Se poucos indivíduos satisfazem a sentença φ, então não são todos indivíduos que satisfazem a sentença φ.

(Ax5) Se todos os indivíduos do universo que satisfazem φ também satisfazem ψ, e se o conjunto de indivíduos que satisfazem φ é não-vazio, então se poucos indivíduos satisfazem ψ, também poucos indivíduos satisfazem φ.

2. Uma lógica do Insuficientes

Apresentaremos aqui uma versão possível para uma lógica do insuficientes.

Nesta primeira versão, consideramos que sentenças que não são satisfeitas por nenhuma evidência (ou indivíduos) não devem ser sentenças insuficientes, mas sim, impossíveis, deste modo:

Para a criação da lógica dos insuficientes, introduzimos um novo quantificador generalizado I, na linguagem usual da lógica clássica de primeira ordem dado por

$$Ix\varphi(x)$$

significando a proposição "há insuficientes x, tais que, $\varphi(x)$".

Quanto a estrutura topológica subjacente à lógica que criaremos, afirmamos que pelos axiomas a seguir, ela não pode ser somente uma topologia reduzida e nem somente seu inverso, queremos uma estrutura V denominada de agora em diante, *topologia parareduzida* que satisfaça as seguintes características:

i) a interseção de dois subconjuntos fechados parareduzidos com intersecção em pelo menos um ponto é um subconjunto fechado parareduzido;
ii) a reunião de dois fechados parareduzidos quaisquer é um subconjunto fechado parareduzido;
iii) X não é um subconjunto fechado parareduzido;
iv) o subconjunto $\emptyset$ não é um fechado parareduzido.

Muitas outras propriedades sobre esta *topologia parareduzida* ainda devem ser estudadas, porém, com base na lógica do poucos apresentada anteriormente, já podemos dar os axiomas lógicos pertencentes à lógica do insuficientes para que a topologia por trás fique mais clara.

Se $\mathcal{L}$ é a lógica de primeira ordem com identidade, a lógica do plausível $\mathcal{L}(I)$ é construída do seguinte modo:

Os axiomas de $\mathcal{L}(I)$ são os axiomas de $\mathcal{L}$ acrescidos dos seguintes axiomas do quantificador I:

(Ax1) $[(Ix\varphi(x) \wedge Ix\psi(x)) \wedge \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))] \rightarrow Ix(\varphi(x) \wedge \psi(x))$;

(Ax2) $Ix\varphi(x) \wedge Ix\psi(x) \rightarrow Ix(\varphi(x) \vee \psi(x))$;

(Ax3) $Ix\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x\varphi(x)$;

(Ax4) $Ix\varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$;

(Ax5) $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Ix(\varphi(x)) \leftrightarrow Ix(\psi(x)))$;

(Ax6) $Ix\varphi(x) \rightarrow Iy\varphi(y)$, se y é livre para x em $\varphi(x)$.

Os dois últimos axiomas têm a função de adequar o modelo proposto para esta lógica, já que esta lógica fará parte da família de *lógicas paramoduladas*. Os axiomas Ax1, Ax2, Ax3 e Ax4 são específicos para a lógica dos insuficientes, e possuem as seguintes características intuitivas:

(Ax1) Se insuficientes indivíduos satisfazem φ e insuficientes indivíduos satisfazem ψ, mas existe alguém que satisfaz ambos, então insuficientes indivíduos satisfazem φ e ψ.

(Ax2) Se insuficientes indivíduos satisfazem φ e insuficientes indivíduos satisfazem ψ então insuficientes indivíduos satisfazem φ ou ψ.

(Ax3) insuficientes indivíduos satisfazem a sentença φ, então não são todos que satisfazem a sentença.

(Ax4) Se insuficientes indivíduos satisfazem a sentença φ, então existem indivíduos que satisfazem φ.

As fórmulas de $\mathcal{L}(I)$ são as mesmas de $\mathcal{L}$ mais aquelas geradas pela seguinte cláusula: se φ é uma fórmula de $\mathcal{L}(I)$, então $Ix\varphi$ é uma fórmula de $\mathcal{L}(I)$. A noção de variável livre e ligada numa fórmula é idêntica para o quantificador I, isto é, toda ocorrência de x em $Ix\varphi$ é ligada.

Temos que o resultado da substituição de todas as ocorrências livres da variável x em φ pelo termo t é denotado por $\varphi(t/x)$. Quando não houver problema em identificar a substituição, denotamos apenas $\varphi(t)$.

As regras de inferência de $\mathcal{L}(I)$ são *Modus Ponens* e Generalização.

As noções sintáticas usuais, como sentença, demonstração, teorema, consequência lógica, consistência, etc., para $\mathcal{L}(I)$, são definidas de modo análogo às definidas na lógica clássica.

Apresentamos, agora, os dois primeiros teoremas de $\mathcal{L}(I)$ fáceis de se demonstrar:

Teorema 1. *As fórmulas abaixo são teoremas em $\mathcal{L}(I)$*

(1) $\neg Ix(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$

(2) $\neg Ix(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$

Demonstração:

(1)	1. $\varphi \vee \neg\varphi$	teorema de L
	2. $\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$	Gen 1
	3. $Ix(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)$	Ax3
	4. $\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \rightarrow \neg Ix(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$	CPC 3
	5. $\neg Ix(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$	MP 3, 4
(2)	1. $\neg\exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$	Teorema de L
	2. $Ix(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$	Ax4
	3. $\neg\exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)) \rightarrow \neg Ix(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$	CPC 2
	4. $\neg Ix(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)))$	MP 1, 3

2.1. Semântica de $\mathcal{L}(I)$

A semântica para as fórmulas em $\mathcal{L}(I)$ é definida da seguinte maneira. Seja $\tau = \langle I, J, K, T_0, T_1\rangle$ e $\mathfrak{A} = \langle A, \{R_i^A\}_{i\in L}, \{f_j^A\}_{j\in J}, \{c_k^A\}_{k\in K}\rangle$ uma estrutura clássica de primeira ordem de tipo τ. Um tipo de estrutura da *topologia parareduzida* de tipo τ para $\mathcal{L}(I)$ é construída dotando $\mathfrak{A}$ de uma topologia parareduzida $V^{\mathfrak{A}}$ sobre A. Em termos formais, temos:

$$\mathfrak{A}^v = \langle A, \{R_i^A\}_{i \in L}, \{f_j^A\}_{j \in J}, \{c_k^A\}_{k \in K}, V^{\mathfrak{A}} \rangle = \langle \mathfrak{A}, V^{\mathfrak{A}} \rangle$$

em que A é o conjunto universo, R_l é uma relação T_0-ária definida em A, para $l \in L$, f_jé uma função j-ária de A^n em A, supondo-se $T_1(j) = n$, para $j \in J$, c_k é uma constante de A, para $k \in K$ e $\mathfrak{A}^v$ é uma *topologia parareduzida* sobre A.

A interpretação de todos os símbolos funcionais, relacionais e constantes individuais é a mesma de $\mathcal{L}(I)$ em A. A *satisfação* de todas as fórmulas de $\mathcal{L}(I)$, numa estrutura $\mathfrak{A}^v$ é definida, recursivamente, de modo usual, acrescentando-se a seguinte cláusula: seja φ uma fórmula cujo conjunto de variáveis livres esteja contido em $\{x\} \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$ e considere uma sequência $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ em A. Definimos

$$\mathfrak{A}^v \models Ix\varphi[\underline{a}] \ \text{ see } \ \{b \in A : \mathfrak{A}^v \models \varphi[b; \underline{a}]\} \in V^{\mathfrak{A}}$$

na qual, como é usual, $\mathfrak{A}^v \models \varphi[\underline{b}]$ denota $\mathfrak{A}^v \models_s \varphi$, sendo que as variáveis livres da fórmula φ ocorrem no conjunto $\{z_1, \ldots, z_n\}$, $s(z_i) = b_i$ e $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. Em particular, para uma sentença $Ix\theta(x), \mathfrak{A}^v \models Ix\theta(x)$ see $\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \theta(a)\} \in V^{\mathfrak{A}}$.

2.2. Correção e Completude

Teorema 2. *Se φ é um teorema de $\mathcal{L}(I)$, então é válido.*

Demonstração. Demonstra-se a validade dos axiomas específicos para o quantificador I, uma vez que os axiomas da lógica clássica de primeira ordem, assim como as regras *Modus Ponens* e Generalização já foram demonstrados no contexto da lógica clássica de primeira ordem.

(Ax1) $[(Ix\varphi(x) \wedge Ix\psi(x)) \wedge \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))] \rightarrow Ix(\varphi(x) \wedge \psi(x))$

Por absurdo, suponha-se a existência de uma *estrutura de topologia parareduzida* $\mathfrak{A}^v$ e uma sequência$[\underline{b}] = (b_1, \ldots, b_n)$ em A de maneira que o axioma (Ax1) não seja válido, isto é,

$$\mathfrak{A}^v \models \neg[[(Ix\varphi(x) \wedge Ix\psi(x)) \wedge \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))] \rightarrow Ix(\varphi(x) \wedge \psi(x))][\underline{b}].$$

Como

$\mathfrak{A}^v \models \neg[[(Ix\varphi(x) \wedge Ix\psi(x)) \wedge \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))] \rightarrow Ix(\varphi(x) \wedge \psi(x))][\underline{b}]$

see

$\mathfrak{A}^v \models [(Ix\varphi(x) \wedge Ix\psi(x)) \wedge \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))][\underline{b}]$ e

$\mathfrak{A}^v \models \neg Ix(\varphi(x) \wedge \psi(x))][\underline{b}]$

see

$\mathfrak{A}^v \models [(Ix\varphi(x)][\underline{b}]$ e $\mathfrak{A}^v \models Ix\psi(x))[\underline{b}]$ e

$\mathfrak{A}^v \models \exists x(\varphi(x))[\underline{b}]$ e $\mathfrak{A}^v \models \psi(x))][\underline{b}]$ e

$\mathfrak{A}^v \models \neg Ix(\varphi(x) \wedge \psi(x))][\underline{b}]$

see

$\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models (\varphi \wedge \psi)[a; \underline{b}]\} \in V^{\mathfrak{A}}$ e

$\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models (\varphi \wedge \psi)[a; \underline{b}]\} \neq \emptyset$ e

$\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models (\varphi \wedge \psi)[a; \underline{b}]\} \notin V^{\mathfrak{A}}$.

Logo, pela definição *topologia parareduzida*, há uma contradição. Portanto, não existe uma *estrutura de topologia parareduzida* $\mathfrak{A}^v$ e uma sequência em A tal que

$\mathfrak{A}^v \models \neg[[(Ix\varphi(x) \wedge Ix\psi(x)) \wedge \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))] \rightarrow Ix(\varphi(x) \wedge \psi(x))][\underline{b}]$.

(Ax2) $Ix\varphi(x) \wedge Ix\psi(x) \rightarrow Ix(\varphi(x) \vee \psi(x))$

Novamente, por absurdo, supondo que exista uma *estrutura de topologia parareduzida* $\mathfrak{A}^v$ e uma sequência $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ em A de modo que o axioma (Ax2) não seja verdadeiro, ou seja,

$$\mathfrak{A}^v \models \neg[Ix\varphi(x) \wedge Ix\psi(x) \rightarrow Ix(\varphi(x) \vee \psi(x))][\overline{b}].$$

Como

$\mathfrak{A}^v \models \neg[Ix\varphi(x) \wedge Ix\psi(x) \rightarrow Ix(\varphi(x) \vee \psi(x))][\overline{b}]$

see

$\mathfrak{A}^v \models Ix\varphi(x) \wedge Ix\psi(x)[\overline{b}]$ e $\mathfrak{A}^v \models \neg(Ix(\varphi(x) \vee \psi(x)))[\overline{b}]$

see

$\mathfrak{A}^v \models Ix\varphi(x)[\overline{b}]$ e $\mathfrak{A}^v \models Ix\psi(x)[\overline{b}]$ e $\mathfrak{A}^v \models \neg Ix\varphi(x)[\overline{b}]$ e $\mathfrak{A}^v \models \neg\psi(x)[\overline{b}]$

see

$\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \varphi[a; \overline{b}]\} \in V^{\mathfrak{A}}$ e $\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \psi[a; \overline{b}]\} \in V^{\mathfrak{A}}$ e

$\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \varphi[a; \overline{b}]\} \in V^{\mathfrak{A}}$ e $\{a \in A : \mathfrak{A}^v \in \psi[a; \overline{b}]\} \in V^{\mathfrak{A}}$.

O que é uma contradição. Logo, não existe uma *estrutura de topologia parareduzida* $\mathfrak{A}^v$ e uma sequência $\overline{b}$ em A tal que

$$\mathfrak{A}^v \models \neg[Ix\varphi(x) \wedge Ix\psi(x) \rightarrow Ix(\varphi(x) \vee \psi(x))][\overline{b}].$$

(Ax3) $Ix\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x\varphi(x)$

Mais uma vez, por absurdo, supondo que exista uma *estrutura de topologia parareduzida* $\mathfrak{A}^v$ e uma sequência $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ em A de modo que o axioma (Ax3) não seja verdadeiro, ou seja, $\mathfrak{A}^v \models \neg(Ix\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x\varphi(x))[\overline{b}]$.
Como
$\mathfrak{A}^v \models \neg(Ix\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x\varphi(x))[\overline{b}]$
see
$\mathfrak{A}^v \models Ix\varphi(x)[\overline{b}]$ e $\mathfrak{A}^v \models \forall x\varphi(x)[\overline{b}]$
see
$\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \varphi[a; \overline{b}]\} \in V^{\mathfrak{A}}$ e $\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \varphi[a; \overline{b}]\} = A$.
Logo, pela definição *topologia parareduzida*, há uma contradição. Portanto, não existe uma *estrutura de topologia parareduzida* $\mathfrak{A}^v$ e uma sequência $\overline{b}$ em A tal que $\mathfrak{A}^v \models \neg(Ix\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x\varphi(x))[\overline{b}]$.

(Ax4) $Ix\varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$

Por absurdo, supondo que exista uma *estrutura de topologia parareduzida* $\mathfrak{A}^v$ e uma sequência $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ em A de modo que o axioma (Ax3) não seja verdadeiro, ou seja, $\mathfrak{A}^v \models \neg(Ix\varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x))[\overline{b}]$.
Como
$\mathfrak{A}^v \models \neg(Ix\varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x))[\overline{b}]$
see
$\mathfrak{A}^v \models Ix\varphi(x)[\overline{b}]$ e $\mathfrak{A}^v \models \neg\exists x\varphi(x)[\overline{b}]$
see
$\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \varphi[a; \overline{b}]\} \in V^{\mathfrak{A}}$ e $\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \varphi[a; \overline{b}]\} = \emptyset$
Logo, pela definição *topologia parareduzida*, há uma contradição. Portanto, não existe uma *estrutura de topologia parareduzida* $\mathfrak{A}^v$ e uma sequência $\overline{b}$ em A tal que $\mathfrak{A}^v \models \neg(Ix\varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x))[\overline{b}]$.

(Ax5) $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Ix(\varphi(x)) \leftrightarrow Ix(\psi(x)))$

Fixe-se uma sequência $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ em A e tome-se

$$J = \{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \varphi[a; \overline{b}]\} \text{ e } Q = \{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \psi[a; \overline{b}]\}.$$

Considere-se que

$$\mathfrak{A}^v \models \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))[\overline{b}] \text{ e } \mathfrak{A}^v \models Ix\varphi(x)[\underline{b}].$$

Logo, $J = Q$ e $\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \varphi[a; \overline{b}]\} \in V^{\mathfrak{A}}$. Portanto, $\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \psi[a; \overline{b}]\} \in V^{\mathfrak{A}}$, de onde $\mathfrak{A}^v \models Ix\psi(x)[\overline{b}]$.

Analogamente, prova-se que se $\mathfrak{A}^v \models \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))[\overline{b}]$ e $\mathfrak{A}^v \models Ix\psi(x)[\overline{b}]$, então $\mathfrak{A}^v \models Ix\varphi(x)[\overline{b}]$.

Logo, para toda estrutura $\mathfrak{A}^v$, tem-se que:

$$\mathfrak{A}^v \models \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Ix\varphi(x) \leftrightarrow Ix\psi(x)).$$

(Ax6) $Ix\varphi(x) \rightarrow Iy\varphi(y)$, se y é livre para x em $\varphi(x)$.

Fixando uma sequência $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ em A e suponha-se que $\mathfrak{A}^v \models Ix\varphi(x)[\underline{b}]$. Dado que y é livre para x em $\varphi(x)$, então

$$\{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \varphi[a; \overline{b}]\} = \{a \in A : \mathfrak{A}^v \models \varphi[y/x][a; \overline{b}]\}.$$

Portanto, $\mathfrak{A}^v \models Iy\varphi[y/x][\overline{b}]$.

Portanto, para toda estrutura $\mathfrak{A}^v$, tem-se que:

$$\mathfrak{A}^v \models Ix\varphi(x) \rightarrow Iy\varphi(y),$$

quando y é livre para x em $\varphi(x)$.

Assim, se φ é um teorema de $\mathcal{L}(I)$, então φ é válida e $\mathcal{L}(I)$ é correta relativa à estrutura $\mathfrak{A}^v$. □

Para a prova da completude, necessitamos do seguinte teorema:

Teorema 3. *Se B é uma coleção de subconjuntos de A tal que $\emptyset \notin B$ e $A \notin B$, então B pode ser estendido a uma topologia parareduzida.*

Demonstração. Seja $B \subset P(A)$ tal que $\emptyset \notin B$ e $A \notin B$. Definamos $V = \{C \in P(A) : \emptyset \neq C \subseteq D \text{ para algum } D \in B\}$.

Então V é uma *topologia parareduzida*, pois:

(i) $\emptyset \notin V$ por definição;

(ii) $A \notin V$, por definição;

(iii) Seja $E \in V$, $F \in V$ e $(E \wedge F) \neq \emptyset$. Como $E \in V$, então $E \subseteq D$ para algum $D \in B$. Como $F \in V$, então $F \subseteq D$ para algum $D \in B$. Como $(E \wedge F) \neq \emptyset$, então $(E \wedge F) \in V$, ou seja, $(E \wedge F) \subseteq D$ para algum $D \in B$. Desde que $C \subseteq (E \wedge F)$ e $(E \wedge F) \subseteq D$, então $C \subseteq D$ com $D \in B$. Logo, $C \in V$.

(iv) Análogo a (iii)

Uma vez que a demonstração da completude é realizada no mesmo estilo de Henkin, mostra-se aqui só o necessário para a lógica do insuficientes (o restante pode ser visto em Oliveira (2011).

Considerando a linguagem $\mathcal{L}(I)$, define-se a *estrutura de topologia parareduzida canônica* $\mathfrak{A}^v = \langle A, \{R_i^A\}_{i \in I}, \{f_j^A\}_{j \in J}, \{c_k^A\}_{k \in K}, V^A \rangle$ tal que $\mathfrak{A}^v \models T$ e todo elemento de A é a interpretação de uma constante de C. Resultado:

(v) para a determinação de $V^{\mathfrak{A}}$, define-se para cada fórmula $\varphi(v)$, com um conjunto $\underline{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de variáveis livres:

$$\varphi(v)^T = \{([c]_1, \ldots, [c]_n) \in A^n : T \vdash \varphi(c_1, \ldots, c_n)\}$$

e considerando as fórmulas $\psi(x)$, com uma única variável livre,

$$\mathbf{B}^T = \{\psi(x)^T \subseteq A : T \vdash Ix\psi(x)\}.$$

Em vista dos axiomas de $\mathcal{L}(I)$ e pelo Teorema acima apresentado, $\mathbf{B}^T \subseteq P(A)$ e pode ser estendida a uma *topologia parareduzida* $V^{\mathfrak{A}}$.

Com isto, podemos verificar que

$$\mathfrak{A}^v \models \varphi \text{ se e somente se } T \vdash \varphi.$$

Se φ é uma sentença da forma $Ix\varphi(x)$, então $\mathfrak{A}^v \models Ix\varphi(x)$ see $\{[c] \in A : \mathfrak{A}^v \models \varphi([c])\} \in V^{\mathfrak{A}}$ see, pela hipótese de indução, $\{[c] \in A : T \vdash \varphi(c)\} \in V^{\mathfrak{A}}$ see $(\varphi(x))^T \in \mathbf{B}^T$ see $T \vdash Ix\varphi(x)$. □

Com esses resultados, demonstra-se que a lógica do insuficientes apresentada é completa.

3. Considerações Finais

Estas primeiras ideias sobre a lógica dos insuficientes mostra que as ideias contidas em Oliveira (2011) para a criação do sistema de lógicas paramoduladas são viáveis. Deste modo, em trabalhos posteriores, teremos a criação das lógicas da minoria e do quase-nenhum, em oposição às lógicas moduladas da maioria e dos ultrafiltros. Após completa todas essas lógicas e feita uma análise entre cada uma delas e sua lógica opositora, tentaremos verificar como todas funcionariam em um único sistema.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio financeiro da FAPESP.

Referências

Barwise, J., Cooper, R. 1981. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy* **4**: 159–219.

Golzio, A. C. J. 2011. *Elementos algébricos para a noção de 'poucos' e sua formalização em sistemas lógicos dedutivos*. 2011. 97 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Filosofia)-Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Câmpus Marília, Marília.

Grácio, M. C. C. 1999. *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*. Tese de doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência), Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 194 p.

Grácio, M. C. C.; Feitosa, H. A. 2005. Lógicas Moduladas: implicações em um fragmento da teoria da linguagem natural. *Revista Eletrônica Informação e Cognição*, Marília, **4**: 1–13.

Keisler, H. J. 1970. Logic with the quantifier "there exist uncountably many". *Annals of Mathematical Logic* (Amsterdam) **1**: 1–93.

Lindström, P. 1966. First Order Predicate Logic with Generalized Quantifiers. *Theoria: A swedish journal of Philosophy and Psychology* **32**.

Mostowski, A. 1957. On a generalization of quantifiers. *Fund. Mathematicae* **44**: 12–36.

Oliveira, K. E. C. S. 2011. *Uma lógica do poucos*. 98 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Filosofia)-Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Câmpus Marília, Marília.

Rescher, N. 1962. Plurality-quantification. *The Journal of Symbolic Logic* **27**: 373–4.

Sgro, J. 1977. Completeness theorems for topological models. *Annals of Mathematical Logic* **11**: 173–93.

Sette, A. M., Carnielli, W. A., Veloso, P. 1999. *An alternative view of default reasoning and its logic*. In: Haeusler, E. H.; Pereira, L. C. (eds.) *Pratica: Proofs, types and categories*. Rio de Janeiro: PUC, p.127–58.

5

Models for the logic of Tarski consequence operator

Hércules de Araujo Feitosa
Mauri Cunha do Nascimento
Marcelo Reicher Soares

Introduction

In a first moment we present the logic **TK** motivated by Tarski's deductive system or Tarski space. So we compare the logic **TK** with the modal logic of deductive closure, introduced by Naumov (2006), and show they are deductively equivalent. In the following we present these systems in another modal axiomatic system and observe that **TK** is a subnormal modal logic. Then we present the almost topological spaces, generalization of topological spaces. In any almost topological space, from the notion of closure, it is possible to obtain a Tarski space; and from any Tarski space we have an almost topological space. So we observe two different ways to develop the same concepts. Finally we prove the adequacy of **TK** relative to any almost topological espace.

1. The logic TK

In this section, it is presented the logic of Tarski consequence operator, the logic **TK**.

In a first moment, motivated by the concept of Tarski consequence operator, it was introduced the TK-algebras (Nascimento, Feitosa 2005). Let us begin with the concept of Tarski consequence.

Definition 1. A consequence operator on E is a function $^{-} : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ such that, for every $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

(i) $A \subseteq \overline{A}$

Mortari, C. A. (org.) *Tópicos de lógicas não clássicas*.
Florianópolis: NEL/UFSC, 2014, pp. 125–137.

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

(iii) $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$.

Of course, from (i) and (iii), for every $A \subseteq E$, the equality $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ holds.

Definition 2. A Tarski space (Tarski deductive system or closure space) is a pair $(E, ^-)$ such that E is a non-empty set and $^-$ is a consequence operator on E.

Definition 3. The set A is closed in a Tarski space $(E, ^-)$, if $\overline{A} = A$, and A is open if its complement relative to E, denoted by A^C, is closed in $(E, ^-)$.

Since, for all $A \subseteq E$, it follows that $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, then $\overline{A}$ is closed in $(E, ^-)$.

Proposition 4. *Every intersection of closed sets in a Tarski space* $(E, ^-)$ *is also a closed set.*

Proof. If $\{A_i\}$ is a collection of closed sets, since $\cap_i A_i \subseteq A_i$, then $\overline{\cap_i A_i} \subseteq \overline{A}_i$, therefore, $\overline{\cap_i A_i} \subseteq \cap_i \overline{A}_i$. Hence, $\cap_i A_i \subseteq \overline{\cap_i A_i} \subseteq \cap_i \overline{A}_i = \cap_i A_i$. □

Clearly, $\overline{\emptyset}$ and E correspond to the least and the greatest closed sets, respectively, associated to the consequence operator $^-$.

Now the definition of TK-algebra.

Definition 5. A TK-algebra is a sextuple $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \sim, \bullet)$ such that $(A, 0, 1, \vee, \sim)$ is a Boolean algebra and $\bullet$ is a new operator, called operator of Tarski, such that:

(i) $a \vee \bullet a = \bullet a$

(ii) $\bullet a \vee \bullet(a \vee b) = \bullet(a \vee b)$

(iii) $\bullet(\bullet a) = \bullet a$.

From the TK-algebras it was introduced the logic **TK**, in (Feitosa, Nascimento, Grácio 2010).

The *propositional logic* **TK** is constructed over the propositional language $L = \{\neg, \vee, \rightarrow, \blacklozenge, p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ with the following axioms and rules:

(CPC) φ, if φ is a tautology

(TK_1) $\varphi \rightarrow \blacklozenge\varphi$

(TK$_2$) $\blacklozenge\blacklozenge\varphi \to \blacklozenge\varphi$

(MP) $\dfrac{\varphi \to \psi, \varphi}{\psi}$

(RM$^\blacklozenge$) $\dfrac{\vdash \varphi \to \psi}{\vdash \blacklozenge\varphi \to \blacklozenge\psi}$.

The TK-algebras are algebraic models for the logic **TK**, as it is shown in (Feitosa, Nascimento, Grácio 2010).

It is possible to define the dual operator of $\blacklozenge$ in the following way:

$$\boxplus\varphi =_{\text{def}} \neg\blacklozenge\neg\varphi.$$

Proposition 6. $\vdash \varphi \to \psi \Rightarrow \vdash \boxplus\varphi \to \boxplus\psi$.

Corollary 7. $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \to \vdash \boxplus\varphi \leftrightarrow \boxplus\psi$.

Proposition 8. $\vdash \boxplus\varphi \to \varphi$.

Proposition 9. $\vdash \boxplus\varphi \to \boxplus\boxplus\varphi$.

Proposition 10. $\vdash \boxplus(\varphi \wedge \psi) \to \boxplus\varphi$.

Corollary 11. $\vdash \boxplus(\varphi \wedge \psi) \to (\boxplus\varphi \wedge \boxplus\psi)$.

We could, alternatively, consider the operator $\boxplus$ as primitive and substitute the axioms TK_1 and TK_2 by the following ones:

(TK$_1^*$) $\boxplus\varphi \to \varphi$,

(TK$_2^*$) $\boxplus\varphi \to \boxplus\boxplus\varphi$,

and the rule $RM^\blacklozenge$ by the rule $RM^\boxplus$:

(RM$^\boxplus$) $\dfrac{\vdash \varphi \to \psi}{\vdash \boxplus\varphi \to \boxplus\psi}$.

2. The modal logic of deductive closure

Considering the notion of provability, Pavel Naumov (2006) introduced the *modal logic of deductive closure*, denoted by $\mathcal{D}$, over the propositional language $L = \{\bot, \to, \Diamond, p_1, p_2, p_3, \ldots\}$[1] with the following definitions, as in the original paper.

Definition 12. Let Σ be a set of statements in language L. A Σ-valuation is an arbitrary map $\star$ of propositional variables of language L into subsets of set Σ.

Definition 13. An arbitrary Σ-valuation $\star$ could be extended on all formulas in L as follows:

(1) $\bot^\star = \emptyset$

(2) $(\varphi \to \psi)^\star = (\varphi^\star)^C \cup \psi^\star$

(3) $(\Diamond\varphi)^\star = \{\alpha \in \Sigma : (\varphi^\star) \vdash \alpha\}$, where $\vdash$ denotes provability in the classical propositional logic.

The system $\mathcal{D}$ is determined by the classical propositional tautologies and the inference rule *Modus Ponens* plus the following axioms and inference rule:

$$(Reflexivity) \qquad \varphi \to \Diamond\varphi$$

$$(Transitivity) \qquad \Diamond(\varphi \vee \Diamond\varphi) \to \Diamond\varphi$$

$$(Monotonicity) \qquad \frac{\varphi \to \psi}{\Diamond\varphi \to \Diamond\psi}.$$

Definition 14. A model of $\mathcal{D}$ is a triple $\langle W, \lhd, \Vdash\rangle$, where W is a set of "possible worlds", $\lhd$ is an "accessibility" relation between elements of W and subsets of W, and $\Vdash$ is a "forcing" relation between elements of W and propositional variables of L. Relation $\lhd$ has the following properties:

(1) if $x \in Y$, then $x \lhd Y$

(2) if $x \lhd Y$ and, for all $y \in Y$, $y \lhd Z$, then $x \lhd Z$.

Definition 15. The relation $\Vdash$ can be extended to the relation between worlds and arbitrary L formulas as follows:

(1) $\omega \nVdash \bot$

(2) $\omega \Vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow \omega \nVdash \varphi$ or $\omega \Vdash \psi$

(3) $\omega \Vdash \Diamond\varphi \Leftrightarrow$ there is V such that $\omega \lhd V$ and for all $v \in V, v \Vdash \varphi$.

3. The deductive equivalence between the two systems

In this section we present a short proof of the deductive equivalence between the two logical systems cited in the previous sections.

Proposition 16. *Every theorem of $\mathcal{D}$ is a theorem of* ***TK****.*

Proof. It is sufficient to show that the transitivity $\blacklozenge(\varphi \vee \blacklozenge\varphi) \to \blacklozenge\varphi$ holds in **TK**.

Using the TK-algebras, it is enough to observe that the polynomial expression $\bullet(a \vee \bullet a) \to \bullet a$ is identical to 1. But $\bullet(a \vee \bullet a) \to \bullet a = \bullet(\bullet a) \to \bullet a = \bullet a \to \bullet a = 1$. □

Proposition 17. *Every theorem of* ***TK*** *is a theorem of $\mathcal{D}$.*

Proof. We only need to show that $\mathcal{D}$ provides TK_2: $\lozenge\lozenge\varphi \to \lozenge\varphi$:

1. $\lozenge\varphi \to \varphi \vee \lozenge\varphi$	CPC
2. $\lozenge\lozenge\varphi \to \lozenge(\varphi \vee \lozenge\varphi)$	Monotonicity in 1
3. $\lozenge(\varphi \vee \lozenge\varphi) \to \lozenge\varphi$	Transitivity
4. $\lozenge\lozenge\varphi \to \lozenge\varphi$	CPC in 2 and 3. □

4. Another presentation of TK as a modal logic

We show that **TK** is deductively equivalent to the classical modal system **EMT4** when considering the operators $\boxplus$ and $\blacklozenge$ to be identical to the necessity and possibility operators $\Box$ and $\Diamond$ as in (Mortari, Feitosa 2011). Taking $\Box$ as primitive, $\Diamond$ can be defined in the usual way:

(Df$\Diamond$) $\Diamond\varphi =_{df} \neg\Box\neg\varphi$.

EMT4 can be axiomatized by adding to the classical propositional calculus the following axiom schemes and rule of inference (Chellas 1980):

(M) $\Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$;

(T) $\Box\varphi \to \varphi$;

(4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$;

(RE) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \;/\; \vdash \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$.

Proposition 18. *Every theorem of **EMT4** is a theorem of **TK**.*

Proof. Follows directly from the definition of $\boxplus$, TK_1^*, TK_2^*, and Corollaries 7 and 11. ◻

Proposition 19. *Every theorem of **TK** is a theorem of **EMT4**.*

Proof. We only need to show that **EMT4** provides $\mathrm{RM}^{\boxplus}$.

1.	$\varphi \to \psi$	hypothesis
2.	$\varphi \to (\varphi \wedge \psi)$	CPC in 1
3.	$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	CPC
4.	$\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi)$	CPC in 2 and 3
5.	$\Box\varphi \leftrightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$	RE in 4
6.	$\Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$	M
7.	$\Box\varphi \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$	CPC in 5 and 6
8.	$(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box\psi$	CPC
9.	$\Box\varphi \to \Box\psi$	CPC in 7 and 8.

◻

As it is well known from the literature about modal logics, in any normal modal logic must holds the law $\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$, however in **TK** only $\Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$ holds. So we observe that **TK** is a subnormal modal logic.

5. On almost topological spaces

The definition and some properties of almost topological spaces.

Definition 20. An almost topological space is a pair (E, Ω) such that E is a non-empty set, $\Omega \subseteq \mathcal{P}(E)$ and for any set of indices I:

(a) if $A_i \in \Omega$, for every $i \in I$, then $\cup_{i \in I} A_i \in \Omega$.

Definition 21. The collection Ω is called an almost topology and each member of Ω is called an open of (E, Ω). A set $A \in \mathcal{P}(E)$ is a closed in (E, Ω) when its complement relative to E, denoted by A^C, is an open of (E, Ω).

Proposition 22. *In any almost topological space* (E, Ω)*, the set* $\emptyset$ *is an open.*

Proposition 23. *In any almost topological space* (E, Ω)*, the intersection of closed sets is a closed set.*

Definition 24. Let (E, Ω) be an almost topological space. The closure of A is the set:

$$\overline{A} =_{df} \cap\{X : A \subseteq X \textit{ and } X^C \in \Omega\}.$$

The interior of A is the set:

$$\mathring{A} =_{df} \cup\{X : X \subseteq A \textit{ and } X \in \Omega\}.$$

Proposition 25. *If* (E, Ω) *is an almost topological space and* $A \subseteq E$*, then* $\overline{A}$ *is closed and* $\mathring{A}$ *is open.*

Proposition 26. *Let* (E, Ω) *be an almost topological space. For every* $A, B \subseteq E$*:*

(i) $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$

(ii) $\mathring{A} = \mathring{\mathring{A}}$

(iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(iv) $\overline{E} = E$

(v) $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$

(vi) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Proposition 27. *Let* (E, Ω) *be an almost topological space and let* $\overline{A} = \cap\{X : A \subseteq X \textit{ and } X^C \in \Omega\}$*, as above, for every* $A \subseteq S$*. Then the pair* $(E, ^-)$ *is a Tarski space.*

On the other hand, if $(E, ^-)$ is a Tarski space, let us consider $\Omega = \{X \subseteq E : X \textit{ is open}\}$.

Proposition 28. *If* $(E, ^-)$ *is a Tarski space and* Ω *is as above, then* (E, Ω) *is an almost topological space.*

It follows from previous propositions that for each Tarski space we can define in a natural way an almost topological space, and for each almost topological space we can define a Tarski space.

Definition 29. An almost topological space (E, Ω) is 0-closed when:

(*b*) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

So, in an almost topological space 0-closed the domain E is open, that is, $\mathring{E} = E$.

Definition 30. A topological space (E, Ω) is an almost topological space 0-closed such:

(*c*) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Or yet $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Definition 31. A Tarski space $(E, ^{-})$ is vacuous when $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

The definition of topological space as a Tarski space in which holds (*b*) and (*c*) was first observed by Kuratowiski and in that case the operator $^{-}$ is the Kuratowiski's closure. Naturally every topological space is a Tarski space, but there are several Tarski spaces that are not topological spaces. Each topological space is an instance of a vacuous Tarski space.

If $E = \{0, 1, 2\}$ and $\Omega = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$, then (E, Ω) is an almost topological space, but is not a topological space, since $\{0, 1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} \notin \Omega$.

In the following section we show the adequacy of the logic **TK** relative to almost topological spaces.

6. Almost topological spaces as models to TK

In this section it is proved the adequacy of **TK** relative to the almost topological spaces.

The set of propositional variables of **TK** is denoted by Var(**TK**), the set of formulas of **TK** is denoted by For(**TK**) and the set of axioms of **TK** is indicated by Ax.

If $\Gamma \subseteq$ For(**TK**), then $\overline{\Gamma}$ is the set of derivable formulas of Γ. The formula ψ is derivable in **TK** or is a theorem of **TK** if $\psi \in \overline{\emptyset}$, that is, $\Gamma = \emptyset$.

Definition 32. A **TK**-theory is a set $\Delta \subseteq$ For(**TK**), such that $\overline{\Delta} = \Delta$.

When $\Delta = \overline{\emptyset}$, this theory coincides with the set of theorems of **TK**, that is, $\psi \in \overline{\emptyset} \Leftrightarrow \vdash \psi$.

Definition 33. A formula $\psi \in \mathrm{For}(\mathbf{TK})$ is refutable in Γ when $\Gamma \vdash \neg\psi$. Otherwise, ψ is irrefutable.

Definition 34. Let (E, Ω) be an almost topological space. A restrict valuation is a function $\langle . \rangle$: $\mathrm{Var}(\mathbf{TK}) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ that interprets each variable of **TK** in an $A \subseteq E$.

Definition 35. A valuation is a function $[.]$: $\mathrm{For}(\mathbf{TK}) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ that extends natural and uniquely $\langle . \rangle$ as follows:

(i) $[p] = \langle p \rangle$
(ii) $[\neg\varphi] = E - [\varphi]$
(iii) $[\blacklozenge\varphi] = \overline{[\varphi]}$
(iv) $[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi]$
(v) $[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi]$
(vi) $[\top] = E$, where $\top$ is any tautology
(vii) $[\bot] = \emptyset$, where $\bot$ is any contradiction.

Definition 36. Let (E, Ω) be an almost topological space. A model for $\Gamma \subseteq \mathrm{For}(\mathbf{TK})$ is a valuation $[.]$: $\mathrm{For}(\mathbf{TK}) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ such that $[\gamma] = E$, for each formula $\gamma \in \Gamma$.

$\langle (E, \Omega), [.] \rangle \vDash \Gamma$ denotes that $\langle (E, \Omega), [.] \rangle$ is a model of Γ.

In particular, if $\varphi \in \mathrm{For}(\mathbf{TK})$, then a valuation $[.]$: $\mathrm{For}(\mathbf{TK}) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ is a model for φ when $[\varphi] = E$. In this case, $\langle (E, \Omega), [.] \rangle \vDash \varphi$ and the formula φ is true in $\langle (E, \Omega), [.] \rangle$.

Definition 37. The formula φ is valid, what is denoted by $\vDash \varphi$, if for every almost topological space (E, Ω) and every valuation $[.]$: $\mathrm{For}(\mathbf{TK}) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ it holds $\langle (E, \Omega), [.] \rangle \vDash \varphi$.

Definition 38. A subset $\Gamma \subseteq \mathrm{For}(\mathbf{TK})$ logically implies ψ, what is denoted by $\Gamma \vDash \psi$, if every model of Γ is a model of ψ.

Now, the easy direction of adequacy.

Lemma 39. $[\varphi \to \psi] = E \Leftrightarrow [\varphi] \subseteq [\psi]$.

Proof. $[\varphi \to \psi] = E \Leftrightarrow [\neg\varphi \vee \psi] = E \Leftrightarrow [\neg\varphi] \cup [\psi] = E \Leftrightarrow (E - [\varphi]) \cup [\psi] = E$ $\Leftrightarrow [\varphi] \subseteq [\psi]$. □

Theorem 40. *(Soundness) If* $\Gamma \vdash \varphi$, *then* $\Gamma \vDash \varphi$.

Proof. The proof is by induction on the the length of the deduction.

If $n = 1$, then φ is an axiom of **TK** or $\varphi \in \Gamma$.

If $\varphi \in \Gamma$, of course, $\Gamma \vDash \varphi$.

So let's consider that φ is an axiom of **TK**. If φ is a tautology, then, by condition (vi) above, $[\varphi] = E$.

If φ is of the type $\psi \to \blacklozenge\psi$, then $[\psi \to \blacklozenge\psi] = [\neg\psi \vee \blacklozenge\psi] = (E - [\psi]) \cup \overline{[\psi]} = E$;

If φ is of the type $\blacklozenge\blacklozenge\psi \to \blacklozenge\psi$, then $[\blacklozenge\blacklozenge\psi \to \blacklozenge\psi] = [\neg\blacklozenge\blacklozenge\psi \vee \blacklozenge\psi] = (E - \overline{\overline{[\psi]}}) \cup \overline{[\psi]} = (E - \overline{[\psi]}) \cup \overline{[\psi]} = E$.

In any case $\Gamma \vDash \varphi$.

By induction hypothesis, the enunciate holds for $k < n$.

If φ was obtained from Γ by MP, then we have $\Gamma \vdash \psi$ and $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$. By induction hypothesis, $[\psi] = E$ and $[\psi \to \varphi] = E$ and by previous lemma $[\psi] \subseteq [\varphi]$. As $[\psi] = E$, hence $[\varphi] = E$.

If φ was obtained from Γ by $RM^{\blacklozenge}$, we have $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ and by inductive hypothesis $[\varphi \to \psi] = E$. By previous lemma $[\varphi] \subseteq [\psi]$ and, by Lemma 26 (vi), $\overline{[\varphi]} \subseteq \overline{[\psi]}$ and from that $[\blacklozenge\varphi \to \blacklozenge\psi] = E$.

Hence $\Gamma \vDash \varphi$. □

Now the other direction, the Completeness.

As mentioned, Feitosa, Nascimento and Grácio (2010) proved that the TK-algebras are strongly adequate models to **TK**. We will denote this algebraic consequence relation for **TK** by $\vDash_A$, and the almost topological consequence relation by $\vDash_{AT}$. So, from the algebraic results, we have:

$$\Gamma \vdash \psi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_A \psi.$$

The Soundness Theorem pointed:

$$\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \vDash_{AT} \psi.$$

Now we need to show the reverse of Soundness, the Completeness, relative to $\vDash_{AT}$. For that we will use the algebraic model and the following lemma.

Lemma 41. *Any TK-algebra $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \sim, \bullet)$ is isomorphic to a Tarski space defined in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.*

Proof. See (Feitosa, Nascimento and Grácio 2010). $\square$

The above lemma is the version of Stone's Theorem for TK-algebras. We will denote that isomorphic Tarski space by (A, Θ), where Θ is the set of closed sets of the Tarski space.

Theorem 42. *If $\Gamma \vDash_{AT} \psi$, then $\Gamma \vDash_A \psi$.*

Proof. If $\Gamma \nvDash_A \psi$, then there is a TK-algebra $\mathcal{A}$ such that $\mathcal{A} \vDash_A \Gamma$, but $\mathcal{A} \nvDash_A \psi$. By previous lemma, we take exactly that Tarski space or almost topological space (A, Θ). Then $(A, \Theta) \vDash_{AT} \Gamma$, but $(A, \Theta) \nvDash_{AT} \psi$ and, hence, $\Gamma \nvDash_{AT} \psi$. $\square$

Now we have showed the adequacy of **TK** relative to almost topological spaces, as semantical spaces.

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma \vdash \psi & & \Leftrightarrow & & \Gamma \vDash_A \psi. \\ \Downarrow & & & & \Uparrow \\ & \Rightarrow & \Gamma \vDash_{AT} \psi & \Rightarrow & \end{array}$$

Corollary 43. *If $\Gamma \vDash \psi$, then there is a finite subset $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ such that $\Gamma_0 \vDash \psi$.*

Proof. If $\Gamma \vDash \psi$, then $\Gamma \vdash \psi$. Let Γ_0 the set of formulas of Γ that occurs in the deduction of ψ from Γ. The set $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ and is finite. As $\Gamma_0 \vdash \psi$, by the Soundness Lemma $\Gamma_0 \vDash \psi$. $\square$

Corollary 44. *(Compactness) If every finite subset of Γ has model, then also Γ has model.*

Proof. If Γ do not has a model, then Γ is inconsistent. In this case, for some formula $\psi \in For(\mathbf{TK})$ it follows that $\Gamma \vdash \psi$ and $\Gamma \vdash \neg\psi$. Let Γ_0 the finite subset of formulas that occurs in the deductions of ψ and $\neg\psi$ from Γ. So $\Gamma_0 \vdash \psi$ and $\Gamma_0 \vdash \neg\psi$ and hence Γ_0 is inconsistent. Thus, Γ_0 do not has a model. $\square$

7. Final considerations

The logic **TK** is a kind of modal logic. The operator ⧫ has an intuitive algebraic interpretation as in (Feitosa, Nascimento, Grácio 2010) and another one given by the Tarski spaces or almost topological spaces, as developed in this paper. Of course each almost topological space determines a TK-algebra too. Mortari and Feitosa (2011) introduced a relational semantic for **TK**, a neighbourhood model. From the paper of Naumov (2006) we meet another interesting model in the Kripke style. It is not exactly a Kripke model because besides anything **TK** is not a normal modal logic.

The logic **TK** is a modal logic of deductibility and must be investigated in other aspects and directions.

But, similar to the relation between **Int** and **S4**, considering **TK** as a subsystem of **S4**, it is interesting to look for a subsystem of **Int** whose model are the open sets of any almost topological space. The concept of translation can be used to generate a such logical system.

Acknowledgements

This work has been sponsored by FAPESP and Project MATUMOVI.

Bibliography

Bell, J. L.; Machover, M. 1977. *A course in mathematical logic*. Amsterdam: North-Holland.

Blackburn, P.; Rijke, M.; Venema, Y. 2001. *Modal logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Carnielli, W. A.; Pizzi, C. 2001. *Modalità e multimodalità*. Milano: Franco Angeli.

Chagrov, A.; Zakharyaschev, M. 1997. *Modal logic*. Oxford: Clarendon Press.

Chellas, B. 1980. *Modal Logic:* an introduction. Cambridge: Cambridge University Press.

Ebbinghaus, H. D.; Flum, J.; Thomas, W. 1984. *Mathematical logic*. New York: Springer-Verlag.

Feitosa, H. A.; Nascimento, M. C.; Grácio, M. C. C. 2010. Logic TK: algebraic notions from Tarki's consequence operator. *Principia* **14**: 47–70.

Fitting, M.; Mendelsohn, R. L. 1998. *First-order modal logic*. Dordrecht: Kluwer.

Mendelson, E. 1987. *Introduction to mathematical logic*. 3. ed. Monterey, CA: Wadsworth and Brooks / Cole Advanced Books and Software.

Miraglia, F. 1987. *Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica*. Coleção CLE **1**. Campinas: UNICAMP/CLE.

Mortari, C. A.; Feitosa, H. A. 2011. A neighbourhood semantic for the Logic TK. *Principia* **15**: 287–302.

Nascimento, M. C.; Feitosa, H. A. 2005. As álgebras dos operadores de consequência. *Revista de Matemática e Estatística* **23**(1): 19–30.

Naumov, P. 2006. On modal logic of deductive closure. *Annals of Pure and Applied Logic* **141**: 218–24.

Rasiowa, H. 1974. *An algebraic approach to non-classical logics*. Amsterdam: North-Holland.

Notes

[1] Originally the author used the symbol $\Box$ in the place of $\Diamond$.

6

Mudanças epistêmicas em sistemas multiagentes ao longo do tempo

Marcio Kléos Freire Pereira

1. Introdução

A análise lógica de sistemas multiagentes abstratos tem sido um recurso importante para o desenvolvimento de teorias aplicáveis a contextos de agentes reais, sejam processadores de dados trocando informações em rede, negociadores movidos por interesses financeiros, etc. (Fagin *et al*. 1992; 1995). As chamadas lógicas (modais) epistêmicas têm se beneficiado bastante dessa atenção, e avançado para aplicações cada vez mais complexas.

Considere-se, por exemplo, o caso de operadores lógicos representando estados epistêmicos *coletivos*. Questões como o acesso de cada agente em um grupo ao estado epistêmico (conjunto de informações) disponível aos demais agentes têm sido tão importantes quanto o acesso do grupo como um todo às informações dispersas pelo grupo e desconhecidas por seus agentes individuais (conhecimento distribuído).

As combinações de operadores modais com linguagens de primeira ordem produzem, além disso, resultados diferentes quando são interpretadas em modelos com domínio constante e modelos com domínios variáveis (ver, por exemplo, Fitting e Mendelsohn, 1996). A validade de esquemas como a famosa *Fórmula de Barcan* e sua inversa é diretamente afetada por essa escolha semântica. Quando se leva em conta que, em situações cotidianas, agentes epistêmicos nem sempre estão cientes de todos os objetos relevantes (e suas respectivas relações) em um contexto de troca de informações, o desenvolvimento de uma lógica que capture essa limitação é bastante desejável. Por exemplo, em uma negociação de caráter financeiro (na vida real),

Mortari, C. A. (org.) *Tópicos de lógicas não clássicas*.
Florianópolis: NEL/UFSC, 2014, pp. 138–159.

diferentes estratégias são requeridas, dependendo de quais informações estão disponíveis para cada negociador e, mais ainda, dependendo do quanto cada negociador sabe acerca do estado epistêmico dos demais.

Adicione-se a isso tudo o fato de que estados epistêmicos, sejam individuais ou coletivos, normalmente variam durante uma troca de informações. Por isso, torna-se também desejável um formalismo que capture esse dinamismo epistêmico — por exemplo, com operadores temporais (Fagin *et al.*, 1995).

O objetivo de nossa apresentação é explorar um tratamento sintático para a lógica epistêmica de primeira ordem acrescida de operadores temporais, considerando modelos com domínios variáveis, e comparar duas estratégias semânticas para se interpretar essa sintaxe: os sistemas interpretados quantificados e as estruturas de estilo kripkeano — o *mainstream* semântico para as lógicas modais. Essa comparação não é gratuita, nem mera curiosidade formal. Ela permite obter a completude da axiomatização apresentada para esse tratamento. Para alcançar nosso objetivo, aproveitaremos bastante do formalismo desenvolvido por Belardinelli e Lomuscio (2007; 2008), adaptando livremente o que for necessário para o trato com domínios variáveis.

2. Uma linguagem de primeira ordem para o cálculo epistêmico-temporal

Seja $A = \{i_1, \dots, i_n\}$ um conjunto finito não vazio com n agentes epistêmicos (para $n \in \mathbb{N}$). Assim, a linguagem multimodal de primeira ordem $\mathcal{L}_n$ conterá as seguintes listas de símbolos:

(i) variáveis individuais globais $x_1, x_2, \dots$;

(ii) variáveis individuais locais $y_1, y_2, \dots$;

(iii) constantes individuais globais $c_1, c_2, \dots$;

(iv) constantes individuais locais $b_1, b_2, \dots$;

(v) funções n-árias $f_1^n, f_2^n, \dots$;

(vi) predicados n-ários $P_1^n, P_2^n, \dots$;

(vii) o predicado de identidade $=$;

(viii) o predicado Adm_i (para $i \in A$);

(ix) conectivos proposicionais clássicos $\neg$ e $\rightarrow$;

(x) quantificador universal $\forall$;

(xi) operadores modais epistêmicos K_i (para $i \in A$) e D_G (para $G \subseteq A$);

(xii) operadores modais temporais fortes $[F]$ (futuro) e $[P]$ (passado).

Por simplicidade, quando desejável, será usada a notação $z_1, z_2, \ldots$ para listar variáveis individuais, independentemente de serem globais ou locais. Além disso, como de praxe, serão omitidos subscritos e índices de aridade nos símbolos listados, quando forem irrelevantes ou evidentes a partir do contexto — por exemplo, a expressão: $\forall x P(x, c) \rightarrow P(f(x), c)$ permite abreviar, se desejado, $\forall x_1 P_1^2(x_1, c_1) \rightarrow P_1^2(f_1^1(x_1), c_1)$.

Definição 2.1 (Termos e fórmulas)**.** Os termos e fórmulas de $\mathcal{L}_n$ são assim definidos (em notação Backus-Naur):

$$t :: x \mid y \mid c \mid b \mid f^k(\vec{t})$$
$$\varphi :: P^k(\vec{t}) \mid Adm_i(t) \mid t = t' \mid \neg\varphi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid K_i\varphi \mid D_G\varphi \mid$$
$$[F]\varphi \mid [P]\varphi \mid \forall x\varphi \mid \forall y\varphi$$

Os demais operadores, quantificadores, etc. são definidos da maneira usual:$\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $\langle F\rangle$, $\langle P\rangle$. As definições de ocorrências livres ou ligadas (de variáveis) também são as usuais. Variáveis individuais locais somente poderão ser substituídas por termos locais, e variáveis individuais globais por termos globais. Propositalmente, foram incluídas listas de constantes individuais locais e globais; porém, como veremos depois, símbolos de funções 0-árias poderiam desempenhar esses papéis.

Por definição, considere-se também as expressões $\forall_i z\ \varphi$ e $\exists_i z\ \varphi$ como abreviando, respectivamente, $\forall z(Adm_i(z) \rightarrow \varphi)$ e $\exists z(Adm_i(z) \wedge \varphi)$. Intuitivamente, o símbolo de predicado Adm_i seleciona, do ponto de vista semântico, os indivíduos admissíveis para o agente i em cada estado global (mundo possível) e os quantificadores indexados por agente têm seu domínio de quantificação restritos ao domínio disponível para o agente em questão.

Enfim, nas expressões $t[\vec{z}]$ e $\varphi[\vec{z}]$, $\vec{z} = z_1, \ldots, z_n$ são todas as variáveis individuais que ocorrem livres em t e φ, respectivamente. Desse modo, $t[\vec{z}/\vec{t}]$ e $\varphi[\vec{z}/\vec{t}]$ referem-se, respectivamente, ao termo e à fórmula que resultam da substituição simultânea das ocorrências livres de $\vec{z}$ por $\vec{t} = t_1, \ldots, t_n$, renomeando-se, caso necessário, as variáveis de cada t_j em $\vec{t}$ que se tornariam ligadas após essa substituição.

3. Sistemas Interpretados Quantificados

Para cada agente epistêmico $i \in A$ em um sistema multiagente (SMA), seja $L_i = \{l_i, l'_i, \ldots\}$ o conjunto dos estados (epistêmicos) locais de i, e seja $Act_i = \{\alpha_i, \alpha'_i, \ldots\}$ o conjunto das ações individuais de i. Considere-se também $L_a = \{l_a, l'_a, \ldots\}$ e $Act_a = \{\alpha_a, \alpha'_a, \ldots\}$ os conjuntos, respectivamente, dos estados e das ações do ambiente (para mais detalhes, ver Fagin *et al.* 1995).

Sendo assim, o conjunto S dos estados globais possíveis do SMA é definido como $S \subseteq L_a \times L_1 \times \ldots \times L_n$ e o conjunto das ações conjuntas possíveis do SMA é definido como $Act \subseteq Act_a \times Act_1 \times \ldots \times Act_n$. Observe-se que se tratam de estados globais possíveis e ações conjuntas possíveis, que podem nunca vir a ser o caso (os estados) ou realizadas (as ações).

Defina-se a função de transição $\tau : Act \longrightarrow (S \longrightarrow S)$; ou seja, $\tau(\alpha)(s) = s'$. Essa função τ define, por assim dizer, as "evoluções admissíveis" do SMA. Além disso, considere-se $s \prec s'$ (leia-se "s' é alcançável em um passo a partir de s") sse, para algum $\alpha \in Act$, $\tau(\alpha)(s) = s'$. E seja também $s \prec^+ s'$ o fecho transitivo de $\prec$ (ou seja, se $s \prec s'$ e $s' \prec s''$, então $s \prec s''$).

Para descrever as evoluções do SMA ao longo do tempo, pressuponha-se $\mathcal{T} = \langle T, < \rangle$ como sendo uma ordem parcial estrita e fracamente conectada. Assim, T é um conjunto não vazio (intuitivamente, de instantes no tempo) ordenados pela relação de precedência $<$, caracterizada pelas seguintes propriedades (para $m, m', m'' \in T$):

(i) $m \not< m$ (irreflexividade)

(ii) $(m < m' \wedge m' < m'') \rightarrow (m < m'')$ (transitividade)

(iii) $(m < m' \wedge m < m'') \rightarrow (m' < m'' \vee m'' < m' \vee m' = m'')$
(conectividade fraca para momentos posteriores)

(iv) $(m' < m \wedge m'' < m) \rightarrow (m'' < m' \vee m' < m'' \vee m' = m'')$
(conectividade fraca para momentos precedentes)

A maneira como $\mathcal{T}$ está definida pode ser modificada para que, dependendo do tipo de lógica temporal a ser considerada, se escolha seu domínio de elementos e o ordenamento temporal desejado (discreto, denso, com ponto inicial, etc.). Aqui, adotaremos $T \subseteq \mathbb{Z}$ com a ordem acima definida. Como de praxe, defina-se $m' > m$ como $m < m'$, e $m \leq m'$ como $m < m' \vee m = m'$.

Uma execução r ("*run*") sobre $\langle S, Act, \tau, \mathcal{T} \rangle$ é uma função $r : T \longrightarrow S$ tal que $m < m'$ implica $r(m) \prec^{+} r(m')$. Ou seja, é a função τ que define, para cada ação conjunta (a combinação das ações de todos os agentes e do ambiente) em um estado global específico s (determinado por $r(m)$), qual o estado global s' (ou $r(m')$) resultante dessa ação. Intuitivamente, cada execução r descreve uma evolução possível do SMA ao longo do fluxo temporal $\mathcal{T}$.

Definição 3.1 (Sistema de Estados Globais Variáveis)**.** Seja um sistema multi-agente qualquer, provido com um conjunto A de agentes epistêmicos, e sejam S, Act, τ e $\mathcal{T}$ conforme descritos acima. Um *sistema de estados globais variáveis* (*SEGV*) sobre $\langle S, Act, \tau, \mathcal{T} \rangle$ consiste em uma 7-upla $\mathcal{P} = \langle R$, D, $\{D_s\}_{s \in S}$,$\{D_{i,s}\}_{i \in A, s \in S}$, F, F^c, $\{F_i\}_{i \in A} \rangle$, tal que:

(i) R é um conjunto não vazio de execuções sobre $\langle S, Act, \tau, \mathcal{T} \rangle$;

(ii) D é um conjunto não vazio de indivíduos;

(iii) D_s e $D_{i,s}$ são conjuntos não vazios de indivíduos;

(iv) F é um conjunto não vazio de funções de S em D;

(v) F^c e F_i são subconjuntos não vazios de F;

(vi) $F^c = \{g \mid g \in F \textit{ e } g(s) = g(s') \textit{ para quaisquer } s, s' \in S\}$;

(vii) $D_s = \{d \mid d \in D \textit{ e } g(s) = d \textit{ para alguma } g \in F\}$;

(viii) $D_{i,s} = \{d \mid d \in D \textit{ e } g(s) = d \textit{ para alguma } g \in F_i\}$.

A classe de todos os *SEGV* será denotada por $\mathcal{SEGV}$.

Seguindo a notação usual (Fagin *et al.* 1995), denomine-se o par (r, m) um *ponto* em $\mathcal{P}$ — ou seja, o ponto (r, m) determina o estado global s em um momento m de uma "linha temporal" (execução) r. Defina-se ainda: se $r(m)$ denota o estado global $s = \langle l_a, l_1, \ldots, l_n \rangle$ no ponto (r, m), então $r_a(m) = l_a$ e $r_i(m) = l_i$ denotarão os estados locais do ambiente e de cada i, respectivamente, no ponto (r, m).

Definição 3.2 (Sistema Interpretado Quantificado)**.** Seja um sistema de estados globais variáveis qualquer $\mathcal{P}$. Um *sistema interpretado quantificado* (*SIQ*) é um par $Q = \langle \mathcal{P}, I \rangle$ tal que, para $s \in S$, $r \in R$, $m \in T$, $r(m) = s$:

- $I(c, r, m) = I(c)$ e $I(c) \in F^c$;
- $I(b, r, m) = I(b)$ e $I(b) \in F$;
- $I(f^0, r, m) = I(f^0)$ e $I(f^0) \in F$;
- $I(f^k, r, m) = I(f^k)$ e $I(f^k) : F^k \longrightarrow F$;
- $I(P^k, r, m) \subseteq D^k$;
- $I(=, r, m)$ é a relação de igualdade entre elementos de D.

A classe de todos os *SIQ* será denotada por $\mathcal{SIQ}$.

Observe-se que somente os símbolos de constantes globais determinam indivíduos rigidamente, porque denotam funções constantes. Os demais símbolos individuais podem indicar indivíduos diferentes, na medida em que as funções que aqueles símbolos denotam determinem valores diferentes, dependendo do ponto considerado. De todo modo, I sempre faz um termo de $\mathcal{L}_n$ designar uma intensão individual (cuja extensão será algum indivíduo em D) em um ponto (r, m).

Acrescente-se ainda a condição (opcional) $A \subseteq D$, estabelecendo assim que os agentes podem raciocinar acerca uns dos outros, desde que aqueles agentes sobre os quais um agente i raciocina pertençam ao seu próprio domínio $D_{i,s}$.

Definição 3.3 (Denotação de um termo em um *SIQ*)**.** Seja σ uma atribuição de elementos de F^c para a lista de variáveis individuais globais $x_1, x_2, \ldots$ e de elementos de F para a lista de variáveis individuais locais $y_1, y_2, \ldots$. Assim:

(i) $I^\sigma(x, r, m) = I^\sigma(x)(r, m) = \sigma(x)(r, m) = \sigma(x)$,

(ii) $I^\sigma(y, r, m) = I^\sigma(y)(r, m) = \sigma(y)(r, m)$,

(iii) $I^\sigma(c, r, m) = I^\sigma(c)(r, m) = I(c)(r, m) = I(c)$,

(iv) $I^\sigma(b, r, m) = I^\sigma(b)(r, m) = I(b)(r, m)$,

(v) $$\begin{aligned} I^\sigma(f^k(t_1, \ldots, t_k), r, m) &= I(f^k)(I^\sigma(t_1, r, m), \ldots, I^\sigma(t_k, r, m)) \\ &= I(f^k)(I^\sigma(t_1), \ldots, I^\sigma(t_k))(r, m). \end{aligned}$$

A cláusula para a interpretação de termos construídos a partir de símbolos de funções garante recursivamente uma comutação nos parâmetros da interpretação. Em especial, para o caso de algum t em $f^k(\vec{t})$, ser, ele próprio, da forma $h^j(\vec{u})$, pode ser mostrado que:

$$\begin{aligned} I^\sigma(f^k(t_1, \ldots, h^j(\vec{u}), \ldots, t_k), r, m) &= \\ &= I(f^k)(I^\sigma(t_1, r, m), \ldots, I^\sigma(h^j(\vec{u}), r, m), \ldots, I^\sigma(t_k, r, m)) \\ &= I(f^k)(I^\sigma(t_1), \ldots, I^\sigma(h^j)(I^\sigma(u_1), \ldots, I^\sigma(u_j)), \ldots, I^\sigma(t_k))(r, m). \end{aligned}$$

Como de praxe em teorias de primeira ordem, uma variante-z de σ é uma atribuição de elementos de F^c (ou F, conforme o caso) idêntica a σ, exceto no máximo pelo elemento atribuído a z. Será usada a notação $\sigma\binom{z}{g}$ para a atribuição que coincide com σ em todos os lugares, exceto para a variável z, que será associada a uma função g, sendo que $g \in F^c$ ou $g \in F$, conforme o caso (ou seja, dependendo de z ser uma variável global x ou uma variável local y, respectivamente).

Definição 3.4 (Satisfabilidade de fórmulas em um *SIQ*)**.** Seja uma atribuição σ e um ponto (r, m) em um sistema intepretado quantificado Q. Assim:

(i) $(Q^\sigma, r, m) \models P^k(\vec{t})$ sse $\langle I^\sigma(t_1, r, m), \ldots, I^\sigma(t_k, r, m)\rangle \in I(P^k, r, m)$;

(ii) $(Q^\sigma, r, m) \models Adm_i(t)$ sse para $r(m) = s$, $I^\sigma(t, r, m) \in D_{i,s}$;

(iii) $(Q^\sigma, r, m) \models t = t'$ sse $I^\sigma(t, r, m) = I^\sigma(t', r, m)$;

(iv) $(Q^\sigma, r, m) \models \neg\psi$ sse $(Q^\sigma, r, m) \not\models \psi$;

(v) $(Q^\sigma, r, m) \models \psi \to \theta$ sse $(Q^\sigma, r, m) \not\models \psi$ ou $(Q^\sigma, r, m) \models \theta$;

(vi) $(Q^\sigma, r, m) \models K_i\psi$ sse $r_i(m) = r'_i(m') \Rightarrow (Q^\sigma, r', m') \models \psi$;

(vii) $(Q^\sigma, r, m) \models D_G\psi$ sse, para todo $i \in G$, $r_i(m) = r'_i(m') \Rightarrow$ $(Q^\sigma, r', m') \models \psi$;

(viii) $(Q^\sigma, r, m) \models [F]\psi$ sse $m < m' \Rightarrow (Q^\sigma, r, m') \models \psi$;

(ix) $(Q^\sigma, r, m) \models [P]\psi$ sse $m' < m \Rightarrow (Q^\sigma, r, m') \models \psi$;

(x) $(Q^\sigma, r, m) \models \forall x\, \psi$ sse, para $r(m) = s$ e para todo $g \in F^c$, $(Q^{\sigma\binom{x}{g}}, r, m) \models \psi$;

(xi) $(Q^\sigma, r, m) \models \forall y\, \psi$ sse, para $r(m) = s$ e para toda $g \in F$, $(Q^{\sigma\binom{y}{g}}, r, m) \models \psi$.

As seguintes cláusulas de satisfabilidade podem ser obtidas facilmente e se mostrar úteis em demonstrações:

$(Q^\sigma, r, m) \models \forall_i x\, \psi$ sse, para $r(m) = s$ e toda $g \in F_i \cap F^c$, $(Q^{\sigma\binom{x}{g}}, r, m) \models \psi$.

$(Q^{\sigma}, r, m) \models \forall_i y\, \psi$ sse, para $r(m) = s$ e toda $g \in F_i$, $(Q^{\sigma\binom{y}{g}}, r, m) \models \psi$;

Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_n$ será denominada *verdadeira em um ponto* (r, m) sse φ for satisfeita em (r, m) para toda atribuição σ. Além disso, φ será *válida em um SIQ* Q sse φ for verdadeira em todo ponto de Q. Finalmente, φ será *válida em uma classe C de SIQ* sse φ for válida em todo *SIQ* $\in C$.

3.1. Alguns resultados interessantes

Dadas as condições acima, vale a pena examinar a validade de algumas fórmulas de $\mathcal{L}_n$. Por exemplo, as diversas variações da Fórmula de Barcan (BF) e de sua inversa (CBF) têm motivado muita discussão, tanto formal quanto filosófica (ver, por exemplo, Fitting e Mendelsohn, 1996). Alguns resultados importantes nas estruturas descritas até aqui são as seguintes *invalidades*:

$\mathcal{SIQ} \not\models \forall z K_i\varphi \to K_i\forall z\varphi$ (BF); $\mathcal{SIQ} \not\models K_i\forall z\varphi \to \forall z K_i\varphi$ (CBF);
$\mathcal{SIQ} \not\models \forall z D_G\varphi \to D_G\forall z\varphi$ (BF); $\mathcal{SIQ} \not\models D_G\forall z\varphi \to \forall z D_G\varphi$ (CBF);
$\mathcal{SIQ} \not\models \forall z[F]\varphi \to [F]\forall z\varphi$ (BF); $\mathcal{SIQ} \not\models [F]\forall z\varphi \to \forall z[F]\varphi$ (CBF);
$\mathcal{SIQ} \not\models \forall z[P]\varphi \to [P]\forall z\varphi$ (BF); $\mathcal{SIQ} \not\models [P]\forall z\varphi \to \forall z[P]\varphi$ (CBF).

Em se tratando de algumas teses envolvendo a relação de igualdade entre termos, bem como sua interação com os operadores modais e o predicado Adm_i, é possível checar que *não valem* os seguintes esquemas:

$\mathcal{SIQ} \not\models t = t' \to K_i(t = t')$; $\mathcal{SIQ} \not\models t = t' \to D_G(t = t')$;
$\mathcal{SIQ} \not\models t = t' \to [F](t = t')$; $\mathcal{SIQ} \not\models t = t' \to [P](t = t')$;
$\mathcal{SIQ} \not\models t \neq t' \to K_i(t \neq t')$; $\mathcal{SIQ} \not\models t \neq t' \to D_G(t \neq t')$;
$\mathcal{SIQ} \not\models t \neq t' \to [F](t \neq t')$; $\mathcal{SIQ} \not\models t \neq t' \to [P](t \neq t')$;
$\mathcal{SIQ} \not\models t = t' \to (Adm_i(t) \to Adm_i(t'))$.

A justificativa intuitiva é mais ou menos óbvia. Na medida em que se está lidando com termos flexíveis, não se pode ter a garantia de que dois termos que determinem o mesmo indivíduo em uma ocasião permaneçam determinando o mesmo indivíduo em outras circunstâncias. Por outro lado, como veremos, se os termos em questão são globais, essa identidade é garantida.

A exigência de que F^c seja não vazio atende às características de expressividade da linguagem, mas poderiam ser relaxadas caso se dispensassem termos globais. Curiosamente, o indivíduo determinado por cada $g \in F^c$ estará presente em cada D_s:

$$\{d \mid d \in D \; e \; g(s) = d \; para \; g \in F^c\} \quad \subseteq \quad \bigcap_{s \in S} D_s.$$

Por isso, para quaisquer termos globais v e v' (símbolos de constantes globais ou variáveis globais):

$$\mathcal{SIQ} \models v = v' \to K_i(v = v'); \qquad \mathcal{SIQ} \models v = v' \to D_G(v = v');$$
$$\mathcal{SIQ} \models v = v' \to [F](v = v'); \qquad \mathcal{SIQ} \models v = v' \to [P](v = v');$$
$$\mathcal{SIQ} \models v \neq v' \to K_i(v \neq v'); \qquad \mathcal{SIQ} \models v \neq v' \to D_G(v \neq v');$$
$$\mathcal{SIQ} \models v \neq v' \to [F](v \neq v'); \qquad \mathcal{SIQ} \models v \neq v' \to [P](v \neq v');$$

Além disso, se houver alguma função constante em F_a ($a \in A$), o indivíduo determinado por essa função também estará presente em cada $D_{a,s}$; ou seja:

$$\{d \mid d \in D \; e \; g(s) = d \; para \; g \in F_a \cap F^c\} \quad \subseteq \quad \bigcap_{a \in A, s \in S} D_{a,s}.$$

Por isso, também vale:

$$\mathcal{SIQ} \models v = v' \to (Adm_i(v) \to Adm_i(v')).$$

Por razões similares, tanto as instâncias de BF como de CBF valerão em todos os $\mathcal{SIQ}$ quando envolverem somente variáveis globais, da seguinte maneira:

$$\mathcal{SIQ} \models \forall x K_i \varphi \leftrightarrow K_i \forall x \varphi; \qquad \mathcal{SIQ} \not\models \forall x D_G \varphi \leftrightarrow D_G \forall x \varphi;$$
$$\mathcal{SIQ} \not\models \forall x [F] \varphi \leftrightarrow [F] \forall x \varphi; \qquad \mathcal{SIQ} \not\models \forall x [P] \varphi \leftrightarrow [P] \forall x \varphi.$$

4. O sistema QK4.S5$_n$

Antes de apresentar nossa lista de axiomas, seguem algumas noções usuais.

Seja $\varphi \in \mathcal{L}_n$. Uma variável z em $\varphi[z]$ é substituível por uma variável livre z' se nenhuma ocorrência livre de z em $\varphi[z]$ ocorre no escopo de algum $\forall z'$ em φ. A expressão $\vdash \varphi$ significa que φ é teorema de QK4.S5. Uma fórmula φ é derivável em QK4.S5$_n$ de um conjunto Δ de fórmulas de $\mathcal{L}_n$ — ou simplesmente: $\Delta \vdash \varphi$ — sse, para alguns $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta$, é o caso que $\vdash \delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n \to \varphi$.

Nos esquemas de axiomas a seguir, seja $\Rightarrow$ a relação de inferência entre fórmulas, e $\blacksquare$ uma ocorrência de alguma das quatro modalidades primitivas de $\mathcal{L}_n$ (a mesma modalidade em cada esquema). Novamente, os símbolos v e

v' representarão termos globais (símbolos de constantes globais ou variáveis globais).

Tautologia	*(todas as instâncias de tautologias clássicas)*
MP	$\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi$
K	$\blacksquare(\varphi \to \psi) \to (\blacksquare\varphi \to \blacksquare\psi)$
4	$\blacksquare\varphi \to \blacksquare\blacksquare\varphi$
Nec	$\varphi \Rightarrow \blacksquare\varphi$
T	$K_i\varphi \to \varphi \qquad D_G\varphi \to \varphi$
5	$\neg K_i\varphi \to K_i\neg K_i\varphi \qquad \neg D_G\varphi \to D_G\neg D_G\varphi$
*D*1	$D_{\{i\}}\varphi \leftrightarrow K_i\varphi$
*D*2	$D_G\varphi \to D_{G'}\varphi$ (para $G \subseteq G'$)
F P	$\varphi \to [F]\langle P\rangle\, \varphi$
P F	$\varphi \to [P]\langle F\rangle\, \varphi$
ConFracaF	$\langle P\rangle\langle F\rangle\, \varphi \to (\langle P\rangle\, \varphi \vee \varphi \vee \langle F\rangle\, \varphi)$
ConFracaP	$\langle F\rangle\langle P\rangle\, \varphi \to (\langle P\rangle\, \varphi \vee \varphi \vee \langle F\rangle\, \varphi)$
VacQuant	$\forall z\, \varphi \leftrightarrow \varphi$ (onde z não ocorre livre em φ)
UnivDistr	$\forall z\, (\varphi \to \psi) \to (\forall z\, \varphi \to \forall z\, \psi)$
Perm	$\forall z\, \forall z'\, \varphi \leftrightarrow \forall z'\, \forall z\, \varphi$
UnivInst	$\forall z'\, (\forall z\, \varphi[z] \to \varphi[z/z'])$ (se z for substituível por z' em φ)
Gen	$\varphi \Rightarrow \forall z\, \varphi$
Ident	$t = t$
SubstTer	$t = t' \to (t''[z/t] = t''[z/t'])$
SubsFor	$t = t' \to (\varphi[z/t] \to \varphi[z/t'])$ (para φ atômica)
NecId	$v = v' \to \blacksquare(v = v')$
NecDif	$v \neq v' \to \blacksquare(v \neq v')$

Acerca da axiomatização acima, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 4.1 (Correção de QK4.S5$_n$ com respeito a $\mathcal{SEGV}$)**.** O sistema QK4.S5$_n$ é correto com respeito à classe de todos os sistemas interpretados quantificados $\mathcal{SIQ}$ (e, portanto, com respeito à classe de todos os sistemas de estados globais variáveis $\mathcal{SEGV}$).

A prova, embora demorada e tediosa, é rotineira e consiste na verificação da validade de todos os axiomas de QK4.S5$_n$ com respeito às cláusulas de satisfatibilidade para *SIQ* e de que suas regras de inferência (*MP, Nec* e *Gen*) preservam a validade das fórmulas consideradas. Será omitida aqui por economia de espaço.

Para se mostrar a completude desse sistema, será feito um “desvio” por um mapeamento dos *SEGV* em estruturas de Kripke especiais, como se verá a seguir.

5. Estruturas variáveis de Kripke

Seguiremos a estratégia de Belardinelli e Lomuscio (2008), fazendo uma tradução dos sistemas de estados globais variáveis para o conhecido aparato das estruturas de Kripke. Naturalmente, diversas adaptações foram necessárias para o trato com domínios variáveis.

Definição 5.1 (Estrutura Variável de Kripke)**.** Uma estrutura variável de Kripke V é uma 9-upla $\langle W, \{\sim_i\}_{i \in A}, <, D, \{D_w\}_{w \in W}, \{D_{i,w}\}_{i \in A, w \in W}, F, F^c \{F_i\}_{i \in A}\rangle$, onde:

(i) W é um conjunto não vazio (de “mundos”);

(ii) $\sim_i$ é uma relação de equivalência sobre W;

(iii) $<$ é uma ordem parcial estrita e fracamente conectada sobre W;

(iv) D é um conjunto não vazio de indivíduos;

(v) D_w e $D_{i,w}$ são subconjuntos não vazios de D;

(vi) F é um conjunto não vazio de funções de W em D;

(vii) F^c e F_i são subconjuntos não vazios de F;

(viii) $F^c = \{g \mid g \in F \textit{ e } g(w) = g(w') \textit{ para quaisquer } w, w' \in W\}$;

(ix) $D_w = \{d \mid d \in D \textit{ e } g(w) = d \textit{ para alguma } g \in F\}$;

(x) $D_{i,w} = \{d \mid d \in D \textit{ e } g(w) = d \textit{ para alguma } g \in F_i\}$.

A classe de todas as estruturas variáveis de Kripke é denotada por $\mathcal{V}$.

A comparação com os SEGV dispensa maiores comentários por enquanto. As novidades óbvias são a consideração de um conjunto W (de *mundos possíveis*) e da relação $\sim_i$ de *acessibilidade epistêmica* entre mundos, indexada por agente epistêmico. A relação é assumida como sendo de equivalência; portanto, no que tange a acessibilidade epistêmica, $\mathcal{V}$ são estruturas de Kripke do tipo S5. Por sua vez, a relação $<$, como anteriormente, é uma ordem irreflexiva, transitiva e fracamente conectada, correspondendo a uma relação (fracamente) linear de acessibilidade temporal (entre mundos).

Definição 5.2 (Modelo variável de Kripke)**.** Um modelo variável de Kripke é um par $M = \langle V, I\rangle$ onde V é uma estrutura variável de Kripke e I é uma função-interpretação para $\mathcal{L}_n$ tal que:

(i) $I(c, w) = I(c)$ e $I(c) \in F^c$;

(ii) $I(b, w) = I(b)$ e $I(b) \in F$;

(iii) $I(f^0, w) = I(f^0)$ e $I(f^0) \in F$;

(iv) $I(f^k, w) = I(f^k)$ e $I(f^k) : F^k \longrightarrow F$;

(v) $I(P^k, w) \subseteq D^k$;

(vi) $I(=, w)$ é a relação de igualdade entre elementos de D.

A classe de todos os modelos variáveis de Kripke em uma estrutura variável V é denotada por $\mathcal{M}$.

As definições para se encontrar a denotação de um termo e para satisfação de fórmulas em M são análogas, respectivamente, às definições 3.3 e 3.4.

Definição 5.3 (Denotação de um termo em M)**.** Seja σ uma atribuição de elementos de F^c para a lista de variáveis individuais globais $x_1, x_2, \ldots$ e de elementos de F para a lista de variáveis individuais locais $y_1, y_2, \ldots$. Assim:

(i) $I^\sigma(x, w) = I^\sigma(x)(w) = \sigma(x)(w) = \sigma(x)$,

(ii) $I^\sigma(y, w) = I^\sigma(y)(w) = \sigma(y)(w)$,

(iii) $I^\sigma(c, w) = I^\sigma(c)(w) = I(c)(w) = I(c)$,

(iv) $I^\sigma(b, w) = I^\sigma(b)(w) = I(b)(w)$,

(v) $$\begin{aligned} I^\sigma(f^k(t_1, \ldots, t_k), w) &= I(f^k)(I^\sigma(t_1, w), \ldots, I^\sigma(t_k, w)) \\ &= I(f^k)(I^\sigma(t_1), \ldots, I^\sigma(t_k))(w). \end{aligned}$$

Similarmente à Definição 3.3, a última condição para a interpretação de termos construídos a partir de símbolos de funções garante que, para o caso de algum t em $f^k(\vec{t})$, ser, ele próprio, da forma $h^j(\vec{u})$, possa ser mostrado que:

$$
\begin{aligned}
I^\sigma(f^k(t_1, \ldots, h^j(\vec{u}), \ldots, t_k), w) = & \\
& = I(f^k)(I^\sigma(t_1, w), \ldots, I^\sigma(h^j(\vec{u}), w) \ldots, I^\sigma(t_k, w)) \\
& = I(f^k)(I^\sigma(t_1), \ldots, I^\sigma(h^j)(I^\sigma(u_1), \ldots, I^\sigma(u_j)), \ldots, I^\sigma(t_k))(w).
\end{aligned}
$$

A definição de uma variante-z para cada atribuição σ é facilmente obtida de modo análogo ao de um *SIQ* e será omitida aqui.

Definição 5.4 (Satisfabilidade de fórmulas em M)**.** Seja uma atribuição σ e um $w \in W$ em um modelo variável de Kripke M. Assim:

(i) $(M^\sigma, w) \models P^k(\vec{t})$ sse $\langle I^\sigma(t_1, w), \ldots, I^\sigma(t_k, w)\rangle \in I(P^k, w)$;

(ii) $(M^\sigma, w) \models Adm_i(t)$ sse $I^\sigma(t, w) \in D_{i,w}$;

(iii) $(M^\sigma, w) \models t = t'$ sse $I^\sigma(t, w) = I^\sigma(t', w)$;

(iv) $(M^\sigma, w) \models \neg\psi$ sse $(M^\sigma, w) \not\models \psi$;

(v) $(M^\sigma, w) \models \psi \rightarrow \theta$ sse $(M^\sigma, w) \not\models \psi$ ou $(M^\sigma, w) \models \theta$;

(vi) $(M^\sigma, w) \models K_i\psi$ sse $w \sim_i w' \Rightarrow (M^\sigma, w') \models \psi$;

(vii) $(M^\sigma, w) \models D_G\psi$ sse $(w, w') \in \bigcap_{i\in G} \sim_i \Rightarrow (M^\sigma, w') \models \psi$;

(viii) $(M^\sigma, w) \models [F]\psi$ sse $w < w' \Rightarrow (M^\sigma, w') \models \psi$;

(ix) $(M^\sigma, w) \models [P]\psi$ sse $w' < w \Rightarrow (M^\sigma, w') \models \psi$;

(x) $(M^\sigma, w) \models \forall x\, \psi$ sse, para todo $b \in F^c$, $(M^{\sigma\binom{x}{g}}, w) \models \psi$;

(xi) $(M^\sigma, w) \models \forall y\, \psi$ sse, para toda $g \in F$, $(M^{\sigma\binom{y}{g}}, w) \models \psi$.

A similaridade com as definições correspondentes para *SIQ* dispensa maiores comentários. As cláusulas derivadas também podem ser facilmente inferidas por analogia e serão omitidas por economia de espaço. Além disso, as definições de validade em um modelo (ou em uma estrutura) para uma fórmula φ seguem o padrão usual:

Uma fórmula φ de $\mathcal{L}_n$ será denominada *verdadeira em um mundo* $w \in W$ sse φ for satisfeita em w para toda atribuição σ. Além disso, φ será *válida em um modelo M* sse φ for verdadeira em todo mundo de M. E, finalmente, φ será *válida em uma classe C de modelos* sse φ for válida em todo $M \in C$.

Definição 5.5. Sejam $V = \langle\ W, \{\sim_i\}_{i\in A}, <, D, \{D_w\}_{w\in W}, \{D_{i,w}\}_{i\in A, w\in W}, F, F^c, \{F_i\}_{i\in A}\rangle$ (uma estrutura variável de Kripke) e $M = \langle V, I\rangle$ (um modelo variável de Kripke). Sejam, para cada $i \in A$, as classes de equivalência $[w]_{\sim_i} = \{w' | w \sim_i w'\}$, e para A com n agentes, seja S um conjunto contendo todas as $n+1$-uplas $\langle w, [w]_{\sim_{i_1}}, \ldots, [w]_{\sim_{i_n}} \rangle$. Enfim, seja $\langle W, < \rangle$ uma ordem parcial estrita e fracamente conectada $<$ sobre W. A função $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{SIQ}$ é tal que:

$$\mu(M) = \langle R, D, \{D'_w\}_{w \in W}, \{D'_{i,w}\}_{i \in A, w \in W}, F', F'^c, \{F'_i\}_{i \in A}, I' \rangle,$$

onde:

(i) R contém a execução r tal que $r(w) = \langle w, [w]_{\sim_1}, \ldots, [w]_{\sim_n} \rangle$, para $w \in W$; e, em consequência, $r_i(w) = [w]_{\sim_i}$;

(ii) D é a mesma que em V, D'_w e $D'_{i,w}$ são subconjuntos de D;

(iii) F' contém as funções g' tais que $g'(\langle w, [w]_{\sim_{i_1}}, \ldots, [w]_{\sim_{i_n}} \rangle) = g(w)$ (para $g \in F$);

(iv) F'^c e F'_i são subconjuntos de F';

(v) $F'^c = \{g' \in F' \mid g'(s) = g'(s') \text{ para quaisquer } s, s' \in S\}$;

(vi) $D'_w = \{d \in D \mid g'(\langle w, [w]_{\sim_{i_1}}, \ldots, [w]_{\sim_{i_n}} \rangle) = d \text{ para alguma } g' \in F'\}$;

(vii) $D'_{i,w} = \{d \in D \mid g((\langle w, [w]_{\sim_{i_1}}, \ldots, [w]_{\sim_{i_n}} \rangle)) = d \text{ para alguma } g' \in F'_i\}$;

(viii) $I'(P^k, r, w) = I(P^k, w)$, $I'(f^k, r, w) = I(f^k, w)$, $I'(=, r, w) = I(=, w)$, e $I' = I$ nos demais casos.

Com as definições acima, o seguinte lema pode ser provado:

Lema 5.1. Para $\varphi \in \mathcal{L}_n$ e $w \in W$:

$$(M^\sigma, w) \models \varphi \text{ sse } (\mu(M)^\sigma, r, w) \models \varphi$$

onde r é a única execução em $\mu(M)$.

A prova desse lema é relativamente simples, embora tediosa, e sai por indução sobre o comprimento de φ.

Claramente $\mu(M)$ é um *SIQ*. Alguns destaques: W é o conjunto dos estados locais do ambiente (cada w é um l_a); cada classe $[w]_{\sim_i}$ é o estado local do agente i, o qual queremos que seja idêntico em todos os mundos acessíveis a i; cada estado global descreve uma combinação de estados locais do ambiente e de cada agente: $(\langle w, [w]_{\sim_{i_1}}, \ldots, [w]_{\sim_{i_n}} \rangle)$; R é não vazio (contém a execução r).

Temos, agora, mais um resultado de correção:

Teorema 5.1 (Correção de QK4.S5$_n$ com respeito a $\mathcal{V}$)**.** O sistema QK4.S5$_n$ é correto com respeito à classe de todos os modelos variáveis de Kripke $\mathcal{M}$ (e, portanto, com respeito à classe de todas as estruturas variáveis de Kripke $\mathcal{V}$).

Há pelo menos duas maneiras distintas para se provar o resultado acima. A primeira é a usual, já descrita antes, e a segunda, embora indireta, é imediata a partir do lema anterior.

6. Completude de QK4.S5$_n$

A estratégia de demonstração (no estilo Henkin, via modelos canônicos) da completude de QK4.S5$_n$ com relação a $\mathcal{SIQ}$, é baseada em Belardinelli e Lomuscio (2008), os quais, por sua vez, adaptaram os resultados de Fagin, Halpern e Vardi (1992) para o sistema proposicional epistêmico $S5_n^D$ e de Gabbay, Hodkinson e Reynolds (1993) para uma lógica temporal de primeira ordem. A prova que se segue está adaptada para as estruturas com domínios variáveis.

Definição 6.1. Seja Γ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_n$. Dizemos que:

(i) Γ é consistente sse $\Gamma \nvdash \perp$;

(ii) Γ é maximal sse, para toda $\varphi \in \mathcal{L}_n$, ou $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$;

(iii) Γ é maximal consistente sse Γ é maximal e consistente;

(iv) Γ é enriquecido sse $\exists x\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi[x/c] \in \Gamma$ (para algum $c \in \mathcal{L}_n$) e $\exists y\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi[y/b] \in \Gamma$ (para algum $b \in \mathcal{L}_n$);

(v) Γ é saturado sse Γ é maximal consistente e enriquecido.

É importante lembrar que x, y, c e b representam, respectivamente, uma variável global, uma variável local, um símbolo de constante global e um símbolo de constante local. A prova do lema abaixo é adaptada de Chang e Keisler (2012).

Lema 6.1 (Saturação)**.** Se Γ é um conjunto consistente de fórmulas de $\mathcal{L}_n$, então Γ pode ser estendido a um conjunto saturado Γ' em uma linguagem expandida $\mathcal{L}_n^+$ obtida a partir de $\mathcal{L}_n$ mediante o acréscimo de dois conjuntos enumeráveis de novos símbolos de constantes.

Demonstração. Assuma que Γ é consistente. Obtenha-se uma expansão simples $\mathcal{L}_n^+$ a partir de $\mathcal{L}_n$ pelo acréscimo dos conjuntos enumeráveis C e B, onde $C = \{c'_0, c'_1, \ldots\}$ é um conjunto de novos símbolos de constantes globais e $B = \{b'_0, b'_1, \ldots\}$ é um conjunto de novos símbolos de constantes locais. Podemos supor que todas as fórmulas de $\mathcal{L}_n^+$ estão dispostas em uma certa ordem $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\xi, \ldots$ $(\xi < \omega)$. Começando por Γ, construímos uma cadeia de extensões:

$$\Gamma = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \ldots \subset \Gamma_\xi \subset \ldots (\xi < \omega).$$

tal que, se $\xi = \zeta + 1$, então:

(i) caso $\Gamma_\zeta \cup \{\varphi_\zeta\}$ seja inconsistente, então $\Gamma_\xi = \Gamma_\zeta$;

(ii) caso $\Gamma_\zeta \cup \{\varphi_\zeta\}$ seja consistente, então $\Gamma_\xi = \Gamma_\zeta \cup \{\varphi_\zeta\} \cup \{\exists x_\zeta \varphi_\zeta \to \varphi_\zeta[x_\zeta / c'_\zeta]\} \cup \{\exists y_\zeta \varphi_\zeta \to \varphi_\zeta[y_\zeta / b'_\zeta]\}$;

onde x_ζ é a única variável global livre em φ_ζ se φ_ζ tiver alguma, e y_ζ é a única variável local livre em φ_ζ se φ_ζ tiver alguma — caso φ_ζ não tenha variáveis livres, arbitre-se x_0 ou y_0 nos lugares, respectivamente, de x_ζ e y_ζ, nos esquemas de fórmulas acima.

Por meio das estratégias usuais de teoria de modelos, é possível mostrar que cada cada Γ_ξ e que $\Gamma' = \bigcup_{\xi<\omega} \Gamma_\xi$ são consistentes. Também pode-se provar que Γ' é saturado. □

Precisaremos agora de algumas definições antes de descrever o modelo canônico que nos interessa.

Definição 6.2. Considerar o seguinte:

(i) Para constantes individuais globais c, c', defina-se $c \approx_w c'$ sse $(c = c') \in w$.

(ii) Como $\approx_w$ é uma relação de equivalência, defina-se $[c]_w = \{c' \mid c \approx_w c'\}$.

(iii) Como $[c]_w = [c]_{w'}$ (para quaisquer $w, w' \in W$), seja $[c]_w = [c]$.

(iv) Para todo termo individual fechado r (ou seja, símbolos de constantes individuais ou termos construídos a partir de símbolos de funções e que não contenham quaisquer variáveis), defina-se uma função π_r tal que:

$$\pi_r(w) = \begin{cases} [c] & \text{se houver um c tal que } (r = c) \in w; \\ \{b \mid (r = b) \in w\} & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

(v) Para o conjunto A de agentes, seja $\mathcal{P}^+(A) = \{A' \mid A' \neq \emptyset \text{ e } A' \subseteq A\}$.

Definição 6.3 (Modelo canônico)**.** O modelo canônico $M^{QK4.S5_n}$ (ou simplesmente: M) para QK4.S5$_n$ na linguagem $\mathcal{L}_n$ com uma expansão simples $\mathcal{L}_n^+$ é uma 10-upla $\langle W, \{R_j\}_{j \in A \cup \mathcal{P}^+(A)}, <, D, \{D_w\}_{w \in W}, \{D_{i,w}\}_{i \in A}, F, F^c, \{F_i\}_{i \in A}, I\rangle$ tal que:

(i) W é o conjunto dos conjuntos saturados de fórmulas em $\mathcal{L}_n^+$;

(ii) para $i \in A$, $w, w' \in W$, wR_iw' sse $\{\varphi \mid K_i\varphi \in w\} \subseteq w'$;

(iii) para $G \subseteq A$, $w, w' \in W$, wR_Gw' sse $\{\varphi \mid D_G\varphi \in w\} \subseteq w'$;

(iv) para $w, w' \in W$, $w < w'$ sse $\{\varphi \mid [F]\varphi \in w\} \subseteq w'$;

(v) $F = \{\pi_r \mid r \in \mathcal{L}_n^+\}$;

(vi) $F^c = \{\pi_r \mid \pi_r(w) = \pi_r(w')$, para $\pi_r \in F$ e quaisquer $w, w' \in W\}$;

(vii) cada $F_i = \{\pi_r \mid Adm_i(r) \in w$, para $r \in \mathcal{L}_n^+$ e cada $w \in W\}$;

(viii) $D_w = \{\pi_r(w) \mid r \in \mathcal{L}_n^+$, para $w \in W\}$;

(ix) $D = \bigcup_{w \in W} D_w$;

(x) $D_{i,w} = \{\pi_r(w) \mid Adm_i(r) \in w$, para $r \in \mathcal{L}_n^+$ e $w \in W\}$;

(xi) I é uma interpretação tal que:

$I(c) = \pi_c$; $I(b) = \pi_b$;

para $e_1, \ldots, e_k \in F$, $I(f^k)(\vec{e})(w) = \pi_{f^k(\vec{r})}(w)$ para $e_i = \pi_{r_i}$;

para $a_1, \ldots, a_k \in D$, $\langle\vec{a}\rangle \in I(P^k, w)$ sse $P^k(\vec{r}) \in w$ (para $a_i = \pi_{r_i}$).

Um exame do modelo canônico M acima mostraria que ele satisfaz as exigências para ser um modelo variável de Kripke. Em particular, se $\nvdash \varphi$, então pelo lema de saturação, há um conjunto saturado que contém $\{\neg\varphi\}$; logo W é não vazio. Em decorrência dos axiomas de QK4.S5$_n$, as várias R_i e R_G acima definidas são relações de equivalência, $R_{\{i\}} = R_i$ e cada $R_G \subseteq \bigcap_{i \in G} R_i$, a relação $<$ é transitiva e fracamente conectada, a relação $w > w'$ pode ser derivada como ocorrendo sse $\{\varphi \mid [P]\varphi \in w\} \subseteq w'$ — a inversa de $<$. Contudo, temos dois problemas: em geral, $R_G \neq \bigcap_{i \in G} R_i$ (Fagin, Halpern e Vardi, 1992) e $<$ pode não ser irreflexiva (Gabbay, Hodkinson e Reynolds, 1993). Para concluir a demonstração, precisaremos de definições e lemas adicionais.

Seja a relação de pseudossatisfação $\models^p$ definida para o modelo canônico M como idêntica a $\models$, exceto pela seguinte condição para o operador D_G:

$$(M^\sigma, w) \models^p D_G\varphi \quad \text{sse} \quad wR_Gw' \text{ acarreta } (M^\sigma, w') \models^p \varphi.$$

Lema 6.2. Seja M o modelo canônico descrito acima e σ uma atribuição para as variáveis (globais e locais). Para $w \in W$ e cada termo fechado e_i, $I^\sigma(t[\vec{z}], w) = I(t[\vec{z}/\vec{e}])(w)$, sempre que $\sigma(z_i) = I(e_i)$.

A prova é imediata a partir da definição 5.3.

Lema 6.3 (Lema da verdade)**.** Seja M o modelo canônico descrito acima. Para $w \in W$, $\varphi \in \mathcal{L}_n^+$, e $\sigma(z_i) = I(e_i)$:

$$(M^\sigma, w) \models^p \varphi[\vec{z}] \quad \text{sse} \quad \varphi[\vec{z}/\vec{e}] \in w.$$

A prova sai por indução sobre o comprimento de φ (ver Fagin, Halpern e Vardi 1992).

Para compensar o fato, indicado acima, de que R_G pode não coincidir com $\bigcap_{i \in G} R_i$, usaremos o modelo canônico M para construir um modelo variável de Kripke M' no qual $R_G = \bigcap_{i \in G} R_i$ e as mesmas fórmulas valham.

Lema 6.4. Seja M o modelo canônico descrito acima. Há um modelo variável de Kripke M' tal que, para toda $\varphi \in \mathcal{L}_n^+$,

$$M' \models \varphi \quad \text{sse} \quad M \models^p \varphi.$$

Demonstração. Suponha $M \models^p \varphi$. Construiremos um modelo especial M^* tal que $M^* \models^p \varphi$ e, a partir do qual obteremos o modelo M' satisfazendo o lema.

Sejam $w, w' \in W$, um *caminho de* w *até* w' é uma sequência $\langle w_1, l_1, w_2, l_2, \ldots, l_{k-1}, w_k\rangle$ tal que: (1) $w = w_1$ e $w' = w_k$; (2) cada w_j na sequência pertence a W; (3) cada l_j é ou um agente ou um grupo de agentes; (4) $\langle w_j, w_{j+1}\rangle \in R_{l_j}$. A *redução* de um caminho $\langle w_1, l_1, w_2, l_2, \ldots, l_{k-1}, w_k\rangle$ é obtida ao se substituir cada subsequência maximal consecutiva $\langle w_q, l_q, w_{q+1}, l_{q+1}, \ldots, l_{r-1}, w_r\rangle$ na qual $l_q = l_{q+1} = \ldots = l_{r-1}$, por $\langle w_q, l_q, w_r\rangle$. Um caminho é chamado *reduzido* sse for idêntico à sua redução.

A partir do modelo canônico M, defina-se

$$M^* = \langle W^*, \{R_j^*\}_{j \in A \cup \mathcal{P}^+(A)}, <^*, D, \{D_w^*\}_{w \in W}, \{D_{i,w}^*\}_{i \in A}, F^*, F^{c*}, \{F_i^*\}_{i \in A}, I^* \rangle$$

e uma função sobrejetiva $h : W^* \longrightarrow W$ tal que: (1) para $w, w' \in W^*$, há no máximo um caminho reduzido de w até w'; (2) $wR_i^* w'$ acarreta que $h(w)R_i h(w')$; 3. $wR_G^* w'$ acarreta que $h(w)R_G h(w')$; (4) $w <^* w'$ acarreta que $h(w) < h(w')$; (5) $\langle \vec{a} \rangle \in I^*(P^k, w)$ sse $\langle \vec{a} \rangle \in I(P^k, h(w))$.

Construímos W^* por indução, onde $W_1^* = W$ e W_{k+1}^* é o conjunto dos mundos $v_{w,l,w'}$ tais que $w \in W_k^*$, $w' \in W$ e cada l é um agente ou grupo de agentes. Seja $W^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k^*$ e defina-se:

$h(w) = w$ para $w \in W_1^*$,

$h(v_{w,l,w'}) = w'$ para $v_{w,l,w'} \in W_k^*$ $(k > 1)$.

Se $w' = v_{w,l,w''}$ para algum $w'' \in W$ e $h(w)R_l h(w')$, então cada R_l^* é o fecho reflexivo, transitivo e simétrico da relação definida para $w, w' \in W^*$. Além disso, se $h(w) < h(w')$, então $<^*$ é a relação definida para $w, w' \in W^*$. Também: $I^*(P^k, w) = I(P^k, h(w))$. É possível verificar que M^* e h, assim construídos, satisfazem as condições 1-5 acima, e, em especial, para $w \in W^*$ e $\varphi \in \mathcal{L}_n^+$ que:

$$(M^{*\sigma}, w) \models^p \varphi \quad \text{sse} \quad (M^\sigma, h(w)) \models^p \varphi.$$

Finalmente, defina-se, a partir de M^* um modelo de Kripke $M' = \langle W'$, $\{R_i'\}_{i \in A}$, $<'$, D', $\{D_w'\}_{w \in W'}, \{D_{i,w}'\}_{i \in A, w \in W'}, F', F'^c, \{F_i'\}_{i \in A}, I' \rangle$ tal que $W' = W^*$, $<' = <^*$, $D' = D^*$, $I' = I^*$, etc., porém R_i' seja o fecho transitivo de $R_i^* \cup \bigcup_{i \in G} R_G^*$. Como as várias R_i^* e R_G^* são relações de equivalência, cada R_i' também o é. Daí:

$$(M'^\sigma, w) \models \varphi \quad \text{sse} \quad (M^{*\sigma}, w) \models^p \varphi.$$

Ou seja, $M \models^p \varphi$ sse $M^* \models^p \varphi$ sse $M' \models \varphi$. □

O último desafio antes de se conseguir a completude está em mostrar que, apesar da relação $<'$ no modelo de Kripke M' não ter sua irreflexividade garantida (como requer um ordenamento temporal típico), é possível construir um modelo irreflexivo M^+ a partir de M' que valide as mesmas fórmulas (Gabbay, Hodkinson e Reynolds, 1993; Belardinelli e Lomuscio, 2008).

Lema 6.5. Seja o modelo de Kripke M' descrito acima. Há um modelo irreflexivo M^+ tal que, para toda $\varphi \in \mathcal{L}_n^+$:

$$M^+ \models \varphi \quad \text{sse} \quad M' \models \varphi.$$

Demonstração. Considere-se o modelo de Kripke M' como definido acima. Sejam $W^{ir} = \{w \mid w \in W' \text{ e } w \not<' w\}$ e $W^r = \{w \mid w \in W' \text{ e } w <' w\}$, respectivamente, o conjunto dos mundos irreflexivos e dos mundos reflexivos de M'. Defina-se a relação de equivalência $\approx$ sobre W^r tal que $w_1 \approx w_2$ sse $w_1 <' w_2$ e $w_2 <' w_1$. Para toda classe a (onde a é alguma classe de equivalência $[w]_\approx$), defina-se uma função sobrejetiva $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow a$ tal que, para todo $w \in a$ e $n \in \mathbb{R}$, haja $m, p \in \mathbb{R}$ e:

$m < n < p$

$\delta(a, m) = w = \delta(a, p)$.

Isso pode ser feito, pois cada classe $[w]_\approx$ tem no máximo $2^{\aleph_0}$ conjuntos saturados de fórmulas. Além disso, para cada $w \in W^{ir}$, seja $\delta(\{w\}, 0) = w$. Defina-se, agora, o modelo de Kripke M^+ tal que seu conjunto W^+ de mundos possíveis consiste em $\{(\{w\}, 0) \mid w \in W^{ir}\} \cup \{(a, p) \mid a$ é uma classe de equivalência do tipo $[w]_\approx$ e $p \in \mathbb{R}\}$. A ordem $<^+$ definida sobre W^+ é tal que

$$(a, p) <^+ (b, q) \text{ sse } \begin{cases} a \neq b & \text{e houver } w_a \in a \text{ e } w_b \in b \text{ tal que } w_a <' w_b; \\ a = b & \text{e } p < q. \end{cases}$$

Como se pode perceber, a relação $<^+$ é uma ordem parcial estrita e fracamente conectada sobre W^+; portanto, irreflexiva. Além disso, cada relação R_i^+ sobre W^+ é tal que $(a, p) R_i^+ (b, q)$ ocorre sse $\delta(a, p) R_i' \delta(b, q)$ for uma relação de equivalência (como de fato é). Quanto ao restante de M^+, seu domínio $D^+ = D'$ e, para $u_1, \ldots, u_k \in D^+$, $\langle \vec{u} \rangle \in I^+(P^k, (a, p))$ sse $\langle \vec{u} \rangle \in I'(P^k, \delta(a, p))$. Adaptações similares devem ser feitas para o comportamento dos demais parâmetros do modelo — $\{D_w^+\}_{w \in W^+}$, $\{D_{i,w}^+\}_{i \in A, w \in W^+}$, F^+, F^{+c}, $\{F_i^+\}_{i \in A}$ — sempre levando em conta essa alteração na descrição dos elementos de W^+ (pares no formato (a, p)). Disso se segue que $(M^{+\sigma}, (a, p)) \models \varphi$ sse $(M'^{\sigma}, \delta(a, p)) \models \varphi$. E, finalmente, temos que $M^+ \models \varphi$ sse $M' \models \varphi$, satisfazendo o lema. □

Os seguintes teoremas de completude (fraca) encerram nossa exposição e são provados sem maiores dificuldades a partir dos lemas anteriores.

Teorema 6.1 (Completude de QK4.S5$_n$ com respeito a $\mathcal{M}$)**.** O sistema QK4.S5$_n$ é completo com respeito à classe de todos os modelos variáveis de Kripke $\mathcal{M}$. Ou seja: para $\varphi \in \mathcal{L}_n$, $\mathcal{M} \models \varphi$ acarreta $\vdash \varphi$.

Teorema 6.2 (Completude de QK4.S5$_n$ com respeito a $\mathcal{SIQ}$)**.** O sistema QK4.S5$_n$ é completo com respeito à classe de todos os sistemas interpretados quantificados $\mathcal{SIQ}$. Ou seja: para $\varphi \in \mathcal{L}_n$, $\mathcal{SIQ} \models \varphi$ acarreta $\vdash \varphi$.

7. Considerações finais

Em se tratando do sistema apresentado nesta exposição, apesar da expressividade alcançada, algumas limitações devem ser destacadas:

(1) A falta de axiomas determinando a interação entre modalidades de "natureza" diferente (epistêmicos com temporais) e seu consequente tratamento semântico. Por exemplo: $K_i\varphi \to [F]K_i\varphi$ ou $\langle P\rangle K_i\varphi \to K_i\varphi$.

(2) Aparentemente, não está garantido que cada agente epistêmico esteja ciente de todos os indivíduos em seu próprio domínio epistêmico. Algum postulado precisa ser acrescido, e o correspondente ajuste na semântica precisa ser investigado. Talvez: $Adm_i(t) \to K_iAdm_i(t)$.

Essas e outras limitações mostram que ainda há bastante trabalho a ser feito.

Apoio

Este trabalho foi realizado com apoio financeiro da FAPEMA (Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão).

Referências

Belardinelli, F.; Lomuscio, A. 2007. Quantified Epistemic Logic with Flexible Terms. *A Meeting of the Minds: Proceedings of the Workshop on Logic, Rationality and Interaction LORI07*. London: College Publications.

———. 2008. A Complete First-Order Logic of Knowledge and Time. *Proceedings, Eleventh International Conference on Principles of Knowledge, Representation and Reasoning*. Palo Alto, CA: AAAI Press.

Chang, C. C.; Keisler, H. J. 2012. *Model Theory*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Fagin, R.; Halpern, J. Y.; Vardi, M. Y. 1992. What can machines know? On the properties of knowledge in distributed systems. *Journal of the ACM* **39**(2): 328–76. New York: ACM.

Fagin, R.; Halpern, J. Y.; Moses, Y.; Vardi, M. Y. 1995. *Reasoning about Knowledge*. Cambridge: MIT Press.

Fitting, M.; Mendelsohn, R. L. 1996. *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Gabbay, D. M.; Hodkinson, I. M.; Reynolds, M. A. 1993. *Temporal Logic, Mathematical Foundations and Computational Aspects* (Volume I). Oxford: Oxford University Press.